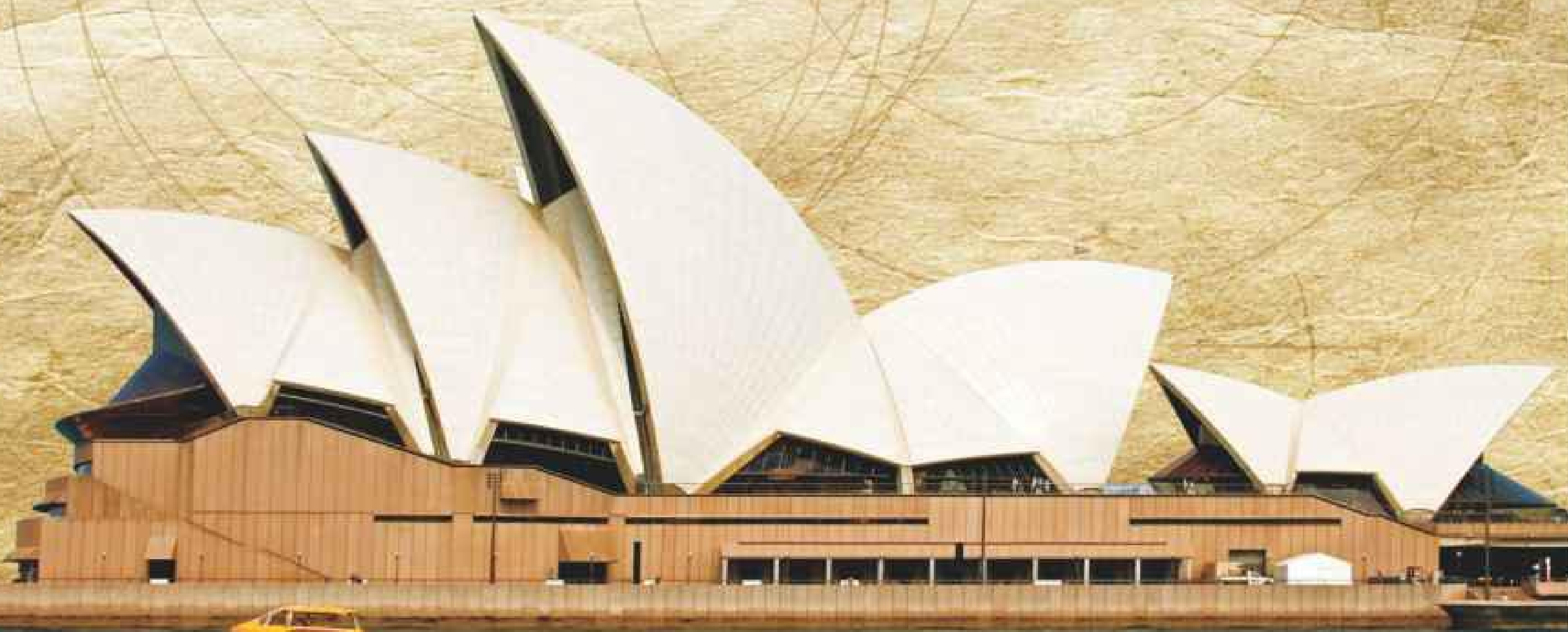
TURING 图灵新知

建筑中的数学之旅

◆美国建筑师学会、欧洲数学学会及美国数学协会隆重推荐
◆美国出版商协会『建筑与城市规划』类年度图书
◆图文并茂，剖析建筑艺术的数学之美

[美] Alexander J. Hahn ◎著
李莉 ◎译

Mathematical Excursions to the World's Great Buildings





人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

版权信息

书名：建筑中的数学之旅

作者：Alexander J. Hahn

译者：李莉

ISBN：978-7-115-33743-6

目录

版权声明
致谢
前言
第1章　人类的觉醒：感知形状与创造建筑
　1.1　感知形状与理解数字
　1.2　上升的文明
　1.3　问题和讨论
第2章　希腊几何学与罗马工程
　2.1　希腊建筑
　2.2　几何学之神
　2.3　测量三角学
　2.4　对力的处理
　2.5　罗马拱
　2.6　罗马竞技场
　2.7　万神殿
　2.8　问题和讨论
第3章　受信仰启示的建筑
　3.1　圣索菲亚大教堂
　3.2　伊斯兰的辉煌
　3.3　罗马式建筑
　3.4　飞升的哥特式
　3.5　建筑委员会年报的记录
　3.6　威尼斯和比萨的魅力
　3.7　问题和讨论
第4章　数学的传播及在建筑中的转化
　4.1　神奇的曲线与神奇的地图
　4.2　数轴
　4.3　坐标平面
　4.4　三维坐标系
　4.5　佛罗伦萨大教堂
　4.6　问题和讨论
第5章　文艺复兴：建筑与人文精神
　5.1　上帝、人和比例

5.2　阿尔伯蒂、音乐及建筑
5.3　帕拉迪奥圆厅别墅和教堂
5.4　达芬奇和布拉曼特：圆形设计为主的教堂
5.5　米开朗基罗的圣彼得大教堂
5.6　贝尼尼的巴洛克巴西利卡
5.7　布鲁内莱斯基和透视法 1
5.8　从圆到椭圆 1
5.9　问题和讨论
第6章　新建筑：材料、结构分析、计算机及设计
6.1　结构演进：从伦敦圣保罗大教堂到华盛顿国会大厦的穹顶
6.2　悬链与升穹顶
6.3　分析结构：静力学和材料
6.4　悉尼歌剧院
6.5　计算机、CAD、CAM及毕尔巴鄂的古根海姆博物馆
6.6　问题和讨论
第7章　基础微积分及其在结构分析中的应用
7.1　微积分基础
7.2　球形穹顶的体积
7.3　理想拱的形状
7.4　力矩和质心的微积分
7.5　问题和讨论
术语表
参考文献
图片来源

版权声明

Original edition, entitled *Mathematical Excursions to the World's Great Buildings* by Alexander J. Hahn, ISBN: 978-0-691-14520-4, published by Princeton University Press.

致谢

本书得到了许多朋友和我在美国圣母大学同事的帮助．尤其感谢我在数学系的同事，感谢他们多年来的支持．特别感谢数学家和前教务长Timothy O'Meara，他阅读了本书前期版本的大量内容，提出了宝贵的修改意见．感谢哲学系的Neil Delaney，与他之间关于弗兰克·盖里和圣地亚哥·卡拉特拉瓦的创造性建筑等内容的交谈让我获益良多，而且我们有着许多共同感兴趣的话题．还要感谢土木工程和地质科学系的David Kirkner，他总是挤出宝贵时间回答我结构工程方面的问题．我还要对建筑学院院长Michael Lykoudis道谢，是他激起了我对建筑的兴趣；还要感谢他的同事Richard Bullene、Norman Crowe、Dennis Doordan、Richard Economakis、David Mayernik、John Stamper和Carroll Westfall，他们为本书提供了各种资料与信息．我还要向朋友及美国圣母大学Kaneb教育和学习中心的同事表示感谢，他们总是提醒我根据学生的学习体验，而非讲解的好坏来评价教学质量．

特别感谢印第安纳大学布鲁明顿分校数学系的Marc Frantz对我文章的积极回应．他的评论颇具批判性，却又总是言之有理，其深刻的建设性意见提高了本书中多处探讨的水准和科学性．还要感谢伯克利数学研究所特殊项目主任Robert Osserman，他澄清了关于圣路易斯大拱门的一个观点．

衷心感谢普林斯顿大学出版社，尤其是本书编辑Vickie Kearn及其助手Stefani Wexler和Quinn Fusting，并感谢制作编辑Sara Lerner．他们总能快速给出回应，且做事极其专业，给了我很大的帮助和鼓舞．

非常感谢我的妻子Marianne，感谢她的爱与支持，感谢她在我写作本书之时无尽的包容与理解．最后，感谢我的父亲George Hahn博士，感谢他以身作则并让我认识到信守承诺的重要性．

Alexander J. Hahn

美国圣母大学数学系

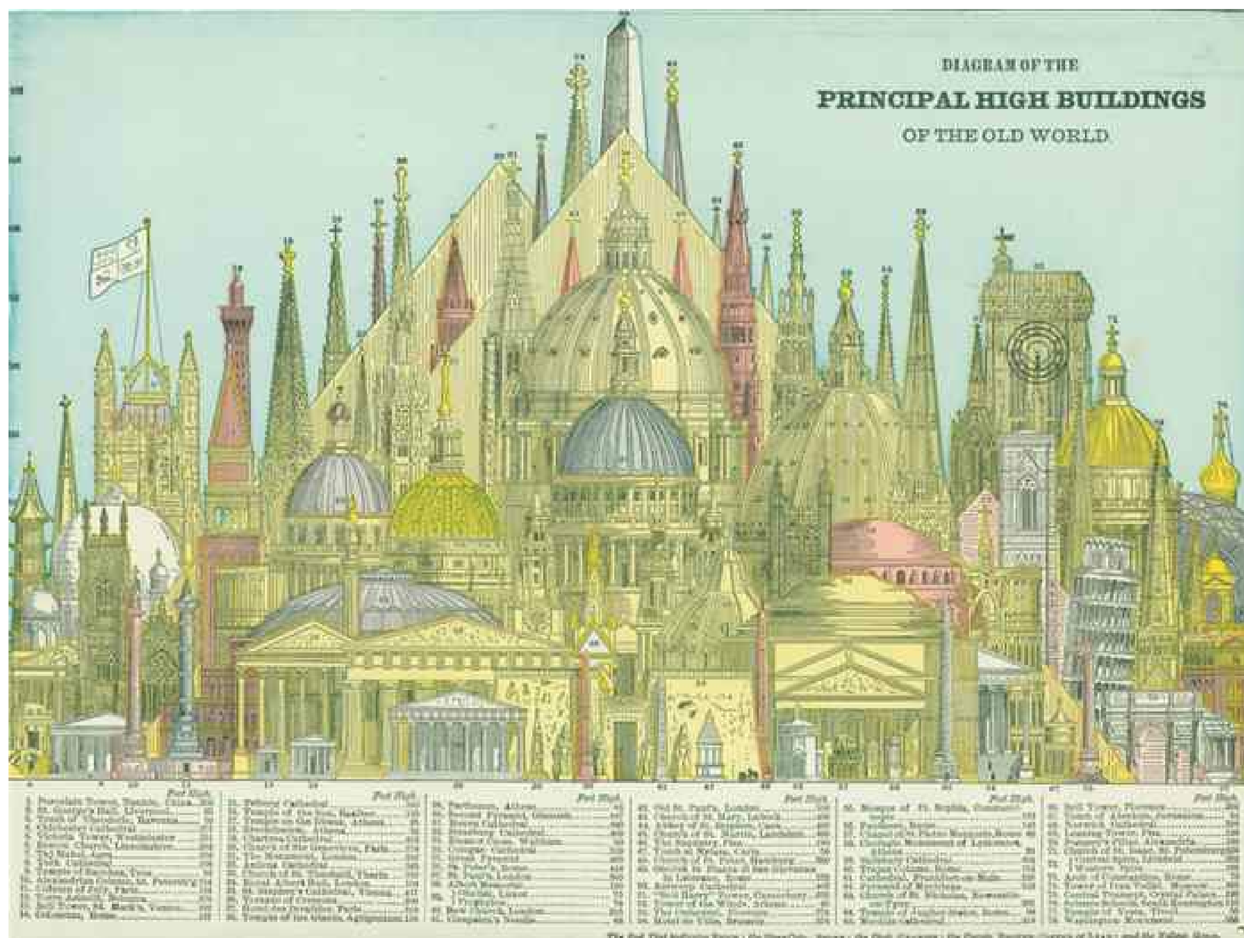
2011年**9**月

前言

本书围绕两条历史叙事主线展开介绍．基本叙事主线主要集中在西方某些伟大建筑的建筑形式（几何学、对称性及比例）和结构（推力、负载、张力、挤压问题）上，其中涵盖了从埃及金字塔到20世纪的标志性建筑．这一叙事主线中的巅峰之作是雅典的帕提农神庙，圣索菲亚大教堂，久负盛名的清真寺，伟大的罗马式、哥特式及文艺复兴期的大教堂，帕拉迪奥圆厅别墅，美国国会大厦，悉尼歌剧院，毕尔巴鄂的古根海姆博物馆，以及罗马的圆形大剧场和万神殿．（这一条主线的叙述内容并不全面，只是争取用赫赫有名的例子来说明建筑的重要特征．）

第二条叙事主线从历史的角度逐步阐述当前的初等数学，包括欧几里得几何的部分知识、三角学、向量的性质、二维和三维解析几何以及（最后的）微积分基础．本书的目的就是将两条叙事主线交织在一起，展示它们是如何互相影响的．数学使人们对建筑的理解清晰化，而建筑则是应用抽象数学的舞台．为清晰起见，这两条叙事主线都围绕所论述的问题展开，而不是完全按照时间顺序安排．实际上，单在时间顺序上来看，人们对于互相影响的建筑和数学的理解并不对等（希腊几何学和建筑例外）．事实上，有可能阐明复杂结构的初等数学知识几乎总是超出当时建筑者的理解能力．

彩图1（指书后彩图）拼贴了各种历史性建筑（均以同样的比例显示），给出了本书的快速导览．本书研究了这里的许多建筑，并特别对其穹顶、拱、柱子和梁进行了数学分析．



彩图 **1**　George F. Gram，《绝佳家用世界地图册》（*Unrivaled Family Atlas of the World*）平板彩印，1884 年，芝加哥．注意，页面底部对彩图的解释并不准确

阅读本书，你需要具有某些高中基础数学的应用知识（如初等代数和一些几何学知识）和学习建筑学及其词汇（如书后术语表所列）的兴趣．本书可按多种顺序阅读，而具体选择在很大程度上受到你自身数学知识的影响．如果你不是特别擅长该学科，我的建议是耐心学习第2章中的欧几里得几何、三角学的一些原理以及向量基础知识，持之以恒并深入研究一下．第1章、第2章、第3章和第5章将带你领略一些建筑知识．第4章初步介绍一些基础数学以及二维/三维坐标系的知识，只要多点耐心和坚持，掌握这些知识并非难事．相信你在学习本书前面6章内容之时，可以享受一次美好的“旅程”．第5章结尾关于透视法的两节以及第6章中与结构工程历史有关的两节内容专业性较强，但你可以先“跳过”，因为它们并不直接影响其他内容的学习．如果你希望有一次更具挑战性的数学学习之旅，可以读完这4部分内容，然后全面学习第7章．第7章

带领大家复习微积分基础知识，并将它的方法用在穹顶和拱的分析中．这7章均以“问题和讨论”一节结束．这里的200多个问题和18个讨论大都关注细节，但有一些偏离主题，拓展了关注范围，若要轻松快速阅读本书，你完全可以忽略它们．而对于其中一些具有挑战性的问题，使用本书的教师应谨慎取舍．

第1章　人类的觉醒：感知形状与创造建筑

人类最早的祖先大约出现在700万年前，而人类种群也已存在了约10万年．这段时期的大部分时间内，人类的主要精力都放在获取食物和寻求遮蔽物上．他们居住在洞穴里，制造石头工具和武器，进行打猎并觅食．大约1万年前发生了一次重大转变．那时，约始于6万年前的冰河期已过去，覆盖现今欧亚大陆的冰原逐渐消退，为森林、平原和沙漠所替代．人类开始了解植物如何自然萌芽、生长，然后自己种植作物．随着时间的推移，他们从洞穴里走出来，建造自己的原始住所，以耕作为生．一些早期棚屋遗址显示它们是以松枝和骨头作为框架，覆盖兽皮建造而成．后来村庄逐渐形成，人类开始烘焙面包、酿造啤酒并储存食物．编织、陶器制作及手工艺发展起来，人们开始交换基本商品．字词被用来表达非常具体的事物，但语言的结构仍很简单．人们发现了铜，并开始冶炼青铜，将它们用来铸造工具和武器．几何图案被用来装饰陶器和编织品，而且这些图案还反映出一些数值关系．贸易活动不断向外辐射，人类的语言能力也随之提高起来．随着工艺、食品产量的提高及商业的发展，人们日益需要口头及用符号表示“有多少”以及“多少钱”，因此终于出现了数字的概念．

随后较大的社区发展起来．安纳托利亚平原（今属土耳其境内）就发掘出过一个大量居所的聚集地，其入口位于房顶上．土坯墙和木制框架围成一个个矩形空间，它们鳞次栉比，共同组成有围墙的城镇．神殿散布在住宅之间，里面有装饰性的动物图像及神祇雕塑．公元前5000年左右，这些定居点开始沿着世界上的几条大河逐渐扩展，并从这些连接彼此通信和商贸的要道中获益，成为经济繁荣、文化兴盛的城市社区．那些位于美索不达米亚（今伊拉克境内）和埃及尼罗河上下游的地方后来成为西方文明的摇篮．河流两岸肥沃的平原孕育了需要具有组织及仓储设施的大规模农业生产．人们兴建灌溉工程，控制河水泛滥，不断促进科技的发展．数学的实践就此展开．此时的数学是一种基础算数，几乎没有符号，也不能用公式表示通用方法．它用于计算基本面积和体积，实际上只是一种解决特定实际问题的工具．为了满足商业和农业的需求，为了向保佑成功的慈悲神祇表示尊敬，以及出于统治者对安稳来生的执着追求，建筑得到了发展．城市里出现了仓库、大量的神殿及精心

建造的陵园．根据功用的不同，这些建筑分别由晒干的砖、石柱与木梁，以及巨石板构成．人们的审美观在有花纹的釉面砖、用于装饰的红陶器物及统治者与神祇的纪念雕像中得到表达．

1.1　感知形状与理解数字

人们开始更敏锐地注意身边的环境，小心的观望转为清醒的认识，敬畏和本能变为谨慎与深思．人们对物理世界感到好奇，开始观察事物间的相似性，并注意到规律和次序．他们观察到夜晚天空的亮光点点、地平线上的海天一线，还有月亮、太阳及眼睛虹膜的圆形．他们意识到树干垂直于平坦的地面、树干与其树枝呈一定角度、明亮天空下松树的影子是三角形．他们好奇于彩虹的弧线、雨滴的形状、叶子和花朵的图案、鱼与海星的形状、海贝的螺旋线、鸡蛋的椭圆形，还有兽角、鸟嘴与獠牙的曲线．他们抬头看到广阔的天空和上面流动的云彩，看到太阳和月亮，认识到周围辽阔的空间．大约3万年前完成的洞穴壁画（彩图2）证实早期人类具有记录所观察到事物的出色能力．实际上，他们向我们表明自己对所处环境有强烈的感受力，能思考所见到及所经历的，并有创作意识．他们清楚认识到自然的组织结构：蕨类植物的叶片构造、冬季里秃树的枝条图案、子房内种子的排列、鸟巢的交织形式、蜂房六角形的重复结构以及蛛网网状的排列．他们开始感受到基本形状，如图1-1和图1-2所示．当人们注意到3棵树、3只吃草的斑马、3只喳喳叫的鸟儿，3朵蘑菇和3声狮吼的共同之处时，开始有了数字的感觉．人类最早关于计数的记录已有1.5~3万年的历史．图1-3中的骨头就是一个例子．



图**1-1**　肖维岩洞内刻画的猫头鹰，**HTO**摄

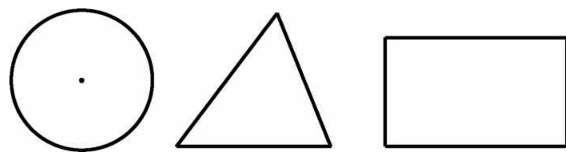


图**1-2**　基本形状



图**1-3**　非洲刚果民主共和国伊塞伍德一个村庄内发现的骨头，照片来自布鲁塞尔科学博物馆



彩图 **2**　法国南部肖维岩洞穴壁上的史前绘画．HTO 摄

大约1万年前发生了一次重要的转变，人们从通过采集和打猎获得食物变为种植庄稼和驯养动物．人们离开洞穴，开始建造原始住所，为了安全，他们聚集在村庄内．他们通过使用绳索和棍棒，能够画出直线和圆．人们布置生活区，但不管是圆形帐篷还是矩形棚屋，其形状和结构都学自自然．他们烤面包、造谷仓、发明轮子和轴，并制作车辆．随后贸易产生了，语言变得更复杂．当人们需要清点物品、估计距离和测量长度时，通常使用手指、双脚和步幅来计数和测量．原始陶器、编织和木工工作得到发展．这些早期的设计、建筑和造型工作培养了人类对平面和空间关系的感觉．英语里“stretch”和“straight”以及“linen”和“line”的关联为这些早期手工艺和早期几何学之间的联系提供了证据．装饰有几何图案的纺织品见图1-4．它们证明人类已更清楚地认识到次序、图案、对称及比例．

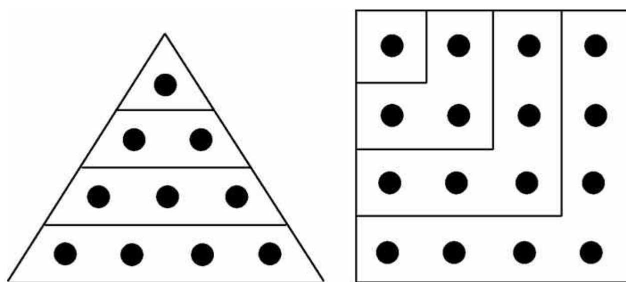


图　**1-4**

人们把诸如危险的天气现象、狂烈的雷暴、破坏性的洪水以及火山爆发这样的强大自然图像及事件的形成均归因于超自然力．为了解释这些现象，神话及原始宗教应运而生．季节性的气候变换及植物的生命周期循环往复，与天空中正午太阳的高度相关，这就使得追踪时光流转中的天象变得重要起来．建筑物成为天文学的开端．英格兰南部的巨石阵就是一个例子．它大概起源于公元前3000年，之后的1000年甚至更晚都有所增加，其特点是巨大的石板两两相对、垂直排列，上面盖有水平的石板．石板按照一定的模式仔细摆放，围出一个直径约305米的圆环．该模式根据太阳活动排列，表明巨石阵曾被用作史前天文台，能够用于预测夏至和冬至日（分别是一年中白昼最长和最短的一天）．图1-5展示了现存的几十块石板．最大的一块重20吨．巨石阵还证明其建造者具有让人难以置信的能力，他们能够移动并改变巨石（megaliths，在希腊语中，mega意为“巨”，liths意为“石”）的形状，按照预期目标将其放置妥当．



图**1-5**　英格兰南部的巨石阵，**Josep Renalias**摄

1.2 上升的文明

农业盈余的出现允许一些人从事与食物生产并不直接相关的特定职业（牧师、商人、建筑工人和工匠），这就产生了城市居住区．从公元前5世纪起，更先进的社会在一些大河，如底格里斯河、幼发拉底河、尼罗河、印度河、黄河以及长江流域发展起来．这些大型河流作为通信和贸易的通道，从邻近高地带来原始材料．大量的灌溉系统把洪水引入肥沃的低地平原，使它五谷丰登．庞大的工程如防洪堤、水坝、运河、水库及仓储设施出现了，用于限制、调节水流以及安排农业生产．精美的神殿得以建造，用以安抚众神，而人们认为上述工作的成功正仰赖于他们的慈悲．人们设计并建造纪念陵园，用以为埃及统治者法老及其他“尊贵”的公民提供顺利、舒适的国度通往来世．由木材和土坯建造的东西敌不过时光侵蚀的力量，如今只剩下那些雄伟壮观的石头建筑．其一是大约建于公元前2500年古埃及首都孟菲斯附近的陵园，包括一座带一个墓室的阶梯金字塔、一座重建的法老宫殿、庭院、祭坛以及一座神殿，这些建筑均建造在由10米高的墙围成的周长1.6千米的矩形内，如今只有金字塔和部分墙残留下来．最大的几座金字塔大约在同一个时代建造，距离今天的城市吉萨不远，见图1-6．其建筑艺术让人叹为观止，除了斜坡、杠杆和结实的绳子，不使用任何机械，也没有比铜更坚硬的金属，成千上万的埃及劳工切割巨大的石块，将它们运到指定地点，并堆叠在精确的位置上．这些金字塔中最大的一座是法老胡夫的（图1-6中右方远处），它的顶点距正方形基座147米，基座的每边长230米．金字塔的顶点差不多正好在正方形基座的中心上方．它由230万块重2.5 ~20吨的石块组成．最下层的石块建在该处石灰岩基岩上，承受了大约650万吨的重量．埃及人在建造纪念碑时最常使用的材料是石灰岩和砂岩．二者均因沉积而成，石灰岩含有碳酸钙；砂岩通常更硬一些，内含沙子，一般是石英碎片，由各种物质粘合在一起．石灰岩和砂岩的结构特性取决于特定的沉积物，不过二者的雕刻与切割都不困难．金字塔内部宽敞的墓室由花岗岩建造，这样可以承受上方石块的巨大压力．花岗岩是从地球炽热的核心流出的熔岩结晶凝固而成，比石灰岩和砂岩要坚硬结实 得多．



图**1-6**　埃及吉萨的大金字塔，**Ricardo Liberato**摄

建造金字塔这样的大型建筑需要良好的组织能力、高超的专业技术以及日益庞大的中央政府所必须要进行的档案保存工作．而这些均需要更丰富的语言符号和进一步发展的数学提供支撑．河流文明的数学最初被用作一种实践科学，以方便进行历法计算、土地测量、公共项目协调、农产品轮换种植的组织以及税赋收缴．在管理人员和牧师的手中，计数及测量的实践与对形状和图案的研究逐步演变为最初的代数学和几何学．

最先进的河流文化由位于底格里斯河与幼发拉底河（今伊拉克境内）之间的美索不达米亚（Mesopotamia，希腊语中，meso意为“在……之间”，potamia意为“河流”）的人民所创造，该地域呈新月形，土地肥沃．这里的人们引入一种按位数值符号，在六十进制的基础上表示整数和分数，用楔形符号表示1, 60, $60^2 = 3600$, $60^{-1}=1/60$, $60^{-2}=1/60^2$．现在我们还能从1小时等于60分钟、1分钟等于60秒、圆可以分成6×60=360°中追寻到一点蛛丝马迹．后来，公元前2000年左右，巴比伦的数学家求出了线性、二次，甚至某些三次方程的解．尤其特别的是，他们知道二次方程$ax^2 + bx + c = 0$的解为：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

巴比伦人知道我们今天所谓的毕达哥拉斯定理．即任何直角三角形，边长为a、b、c，其中c是斜边，则有$a^2+b^2=c^2$成立．一块公元前1900年~公元前1600年间铸造的泥板证实了巴比伦人的成就．普林顿收藏中标作322号的泥板列出了一些3个一组的整数a、b和c，它们具有$a^2+b^2=c^2$的特点．如果这些数代表直角三角形的边，那么它们就成为毕达哥拉斯定理的具体实例．例如，三组数为$a=3$、$b=4$、$c=5$（见图1-7）．再如，$a=5$、$b=12$、$c=13$．泥板上一些数值非常大的数组强有力地表明巴比伦人掌握了提出这些数的方法．巴比伦人还掌握了计算标准平面面积及一些简单立体体积的公式．他们还分析了天体的位置，提出计算天文学，用于预测日食和月食．

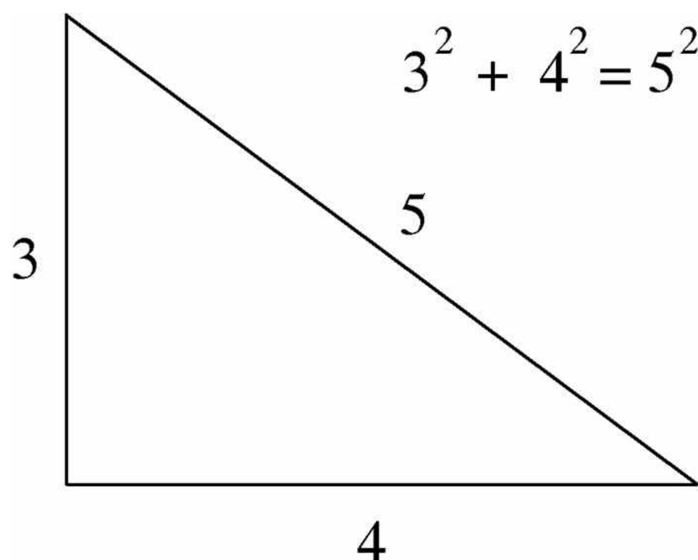


图　**1-7**

埃及的莱茵德纸草书是可追溯至公元前1600年左右的一幅长卷，其局部如图1-8所示．纸草书（纸草是那个时期用来当纸的植物产品）得名于苏格兰人A. Henry Rhind，他于19世纪从埃及买到这幅长卷．它的简介宣称它是“对万物的彻底研究，对一切存在的洞察，对所有隐秘的认识”．但实际上它只不过是一本用于商业和行政领域的数学练习教科

书．它提出了85个数学问题以及详细的分数理论，凭此可求解许多问题，它们展现了彼时埃及数学家的才华与成就．它还记录了圆周长c与其直径d的比率$\frac{c}{d}$约为$\left(\frac{16}{9}\right)^2=\frac{256}{81}\approx 3.160\,5$．这一比率现在记作π（更精确的估计是π≈3.1416）．纸草书还包括一些实际的建议："捕捉害虫和老鼠，拔去有毒的野草；向太阳神拉祈求热、风和丰沛的水．"

作为思想日益走向成熟的物理见证，建筑也得到了发展．带围墙的巴比伦城有着雄伟的神殿和高塔，以建筑奇观闻名世界．公元前15世纪，希腊历史学家希罗多德广泛游历了地中海地区，并记录下亲眼所见．关于巴比伦，他写道："就富丽堂皇而言，没有其他城市可与之媲美．"但不幸的是，该城现在几乎荡然无存．它的一个内城主城门建于公元前16世纪初期，用于供奉伊斯塔女神．其中央大道以高高的半圆形拱券、贴蓝色琉璃瓦的墙以及雪松木的门和屋顶为特色．伊斯塔门的中部（只是古代城门的一小部分）现已用原址发掘的材料重建．它高14.3米，矗立在柏林的佩加蒙博物馆内．伊拉克巴格达的原址附近也有类似的复建物．

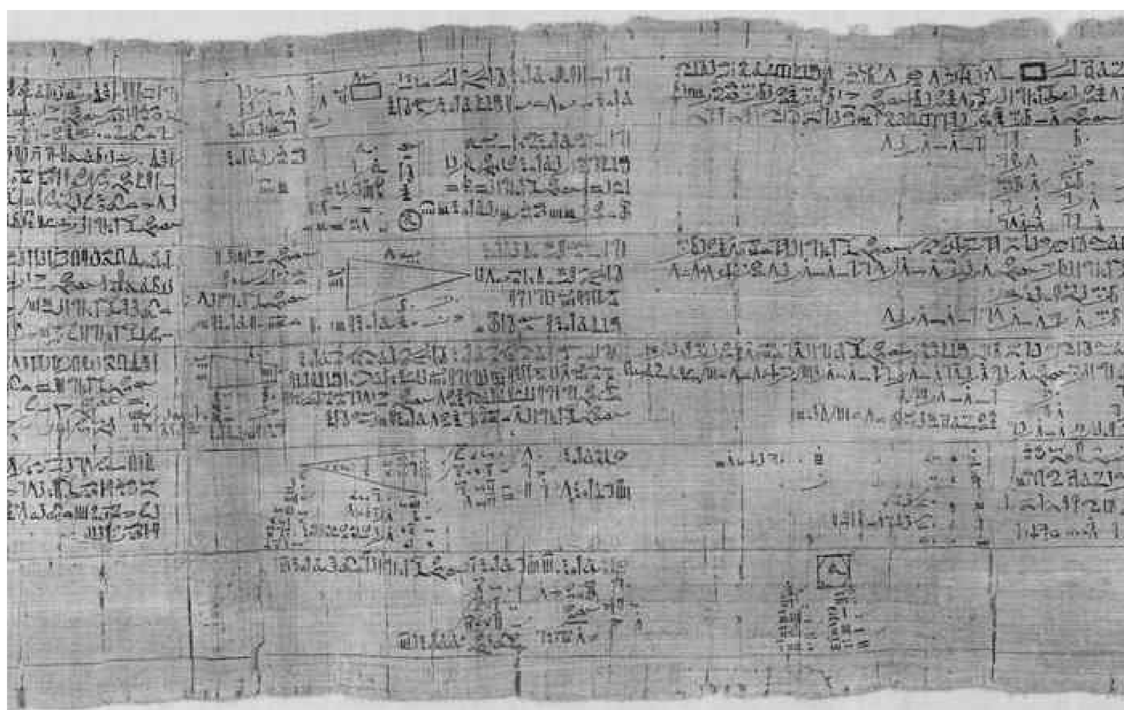
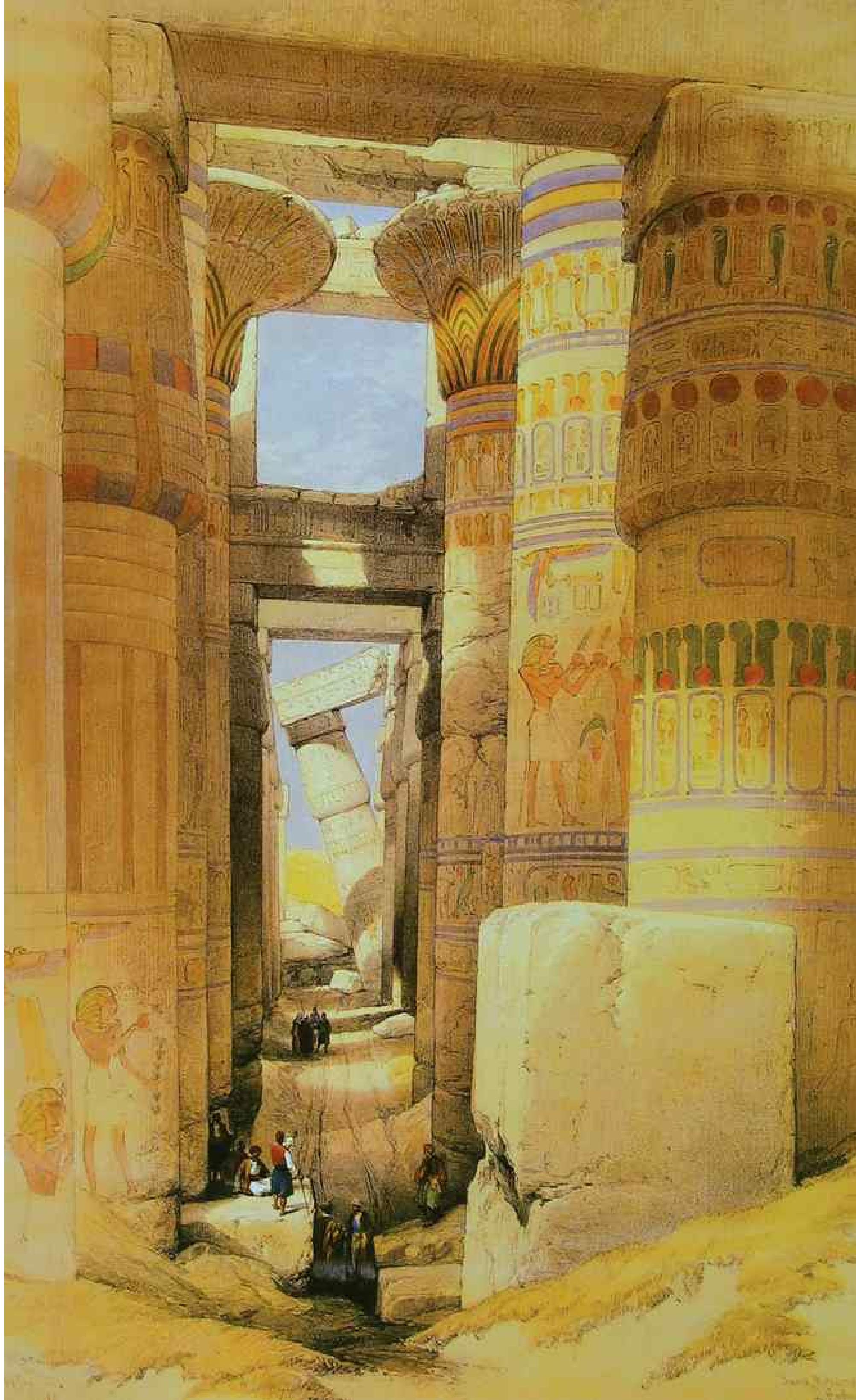


图**1-8**　莱茵德纸草书，现藏于伦敦大英博物馆，照片版权归大英博物馆理事会所有

埃及的建筑物比巴比伦的更能经受住时间的考验．公元前2000年中期，

太阳神阿蒙升为国家的主神，激励人们建造出比以前更精美壮观的石头神殿．例如，从公元前16世纪中期到公元前14世纪，人们在如今的城市卡尔奈克附近建造了引人注目的宏伟的阿蒙神庙．一代代法老王下令建造有纪念意义的入口大门、方尖碑、巨大的雕像以及宏伟的典礼大厅．这些厅中最大的一间建于强大的拉美西斯二世统治时期．它的面积是50米×100米，用许多高大的柱子支撑着屋顶沉重的石板．从彩图3可以看出，仅现存的结构就足以让而今的游客感受到它之前的宏大及庄严．



彩图 **3**　阿蒙神庙的柱厅，卡尔奈克，埃及．由 Louis Haghe 印刷，

1842~1849，选自 David Roberts 的绘画 , 1838~1839

另一个例子是同样由拉美西斯二世为其荣誉而造的阿布辛贝勒神庙，它建于公元前14世纪，位于埃及南部．图1-9展示了在尼罗河畔砂岩壁上凿出的神庙，其正面大部分被伟大的拉美西斯二世正襟危坐的雕像所占据．这些巨大的雕像高20.4米，重1200吨．较小的雕像用于纪念王后及地位稍低的权贵．图片显示砂岩已受到破坏．这座古代的阿布辛贝勒神庙有着一段现代的历史．1815年前后，一度几乎完全被流沙掩埋的它显露出来，被人们重新发现．到20世纪60年代，神庙受到上埃及阿斯旺附近大坝所形成人工湖水位上升的威胁，联合国组织人们付出了巨大的努力来进行拯救．他们将寺庙正面及其精美的内部（延伸至岩石内60.96米）切割成好几吨重的石块，然后逐一小心地移动并重新安放，最后完全按照原样把神庙挪到了百米远的较高地带．



图**1-9**　埃及阿布辛贝勒神庙的正面，由**Louis Haghe**印刷（**1842~1849**），选自**David Roberts**的绘画（**1838~1839**）

以上内容非常粗略地回顾了早期的数学和建筑，人类正是这样不断认识身边的形状、图案和结构，并将其用于影响他们生存的活动中去．古代文明中的数学和建筑受到不同因素的推动作用．数学的出现首先与组织

和生产管理、商贸及基础设施的实际需要相关，而建筑的主要目标是给统治者及其神祇的价值与伟大提供强大的视觉表达.

1.3 问题和讨论

下面的问题与文中讨论的内容有关．你可以通过这些题目思考并熟练掌握一些基础数学知识．

问题**1**　考虑图1-10(a)中的图形．自顶而下点的总数是1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6．而 图1-10(b)中点的个数为

$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4) + (4 + 3) + (5 + 2) + (6 + 1) = 6 \times 7$

因此1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6= $\frac{1}{2}(6\times 7)$．用同样的方法，对任意正整数n，有 $1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

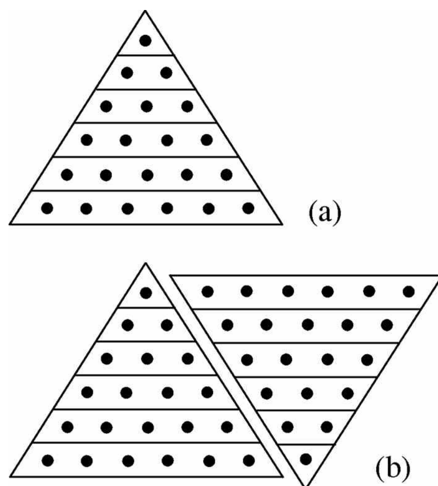


图　**1-10**

问题**2**　从1开始的任何连续奇数的和应该都是平方数，例如$1 + 3 = 2^2$、$1 + 3 + 5 = 3^2$、$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$、$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$．图1-11表明$1+3+5+7+9+11=6^2$．假设n为任意正整数，考虑奇数$2k-1$．令式中的 $k = 1, k = 2, \ldots, k = n$，则前$n$个奇数列为1, 3, 5, … ,$2n-1$．证明它们的和$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$等于$n^2$．【提示：用与问题1相同的求解方法可得．】

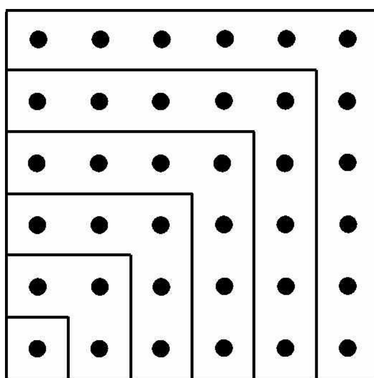


图 **1-11**

问题**3** 取任意两个正整数m和n，$n>m$．令 $a = n2 - m^2$ 、 $b = 2\ nm$ 、 $c = n^2 + m^2$，可得到正整数a，b，c．这便是生成能满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的数a，b，c的方法．取m=1，n=2，可得a = 4-1 = 3, b = 2×2 = 4, c = 4 + 1 = 5．因为$3^2 + 4^2= 5^2$ ，可见在这个例子中这种方法有效．取m=2，n=3，可得a = 9-4 = 5, b = 2×6 = 12, c = 9 + 4 = 13．因为$5^2+ 12^2= 169=13^2$ ，同样，在本例中这种方法也有效．证明一般情况下这种方法成立，并用它列出其他5组满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的正整数(a, b, c)．

问题**4** 研究图1-12所示的三个图形．直角三角形边长为a、b、c，其中c已给定．中间的图有两个正方形，这两个正方形按照如下方式安排，即它们所确定的4个三角形区域均与给定的三角形全等．利用这些图，写出验证毕达哥拉斯定理的过程．

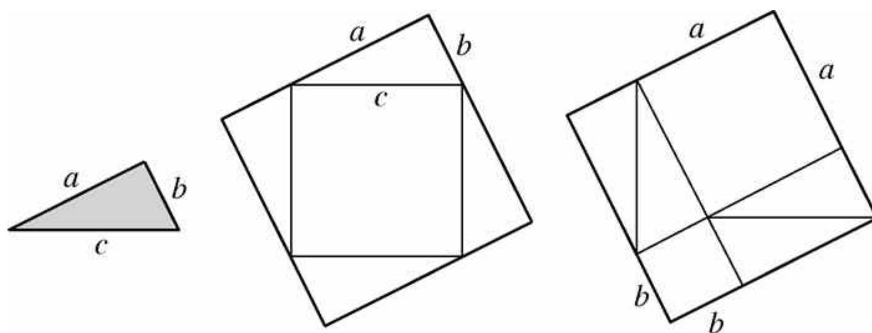


图 **1-12**

问题**5** 中国人也知道毕达哥拉斯定理．用图1-13(b)表示图1-13(a)的中国古代图形的基本信息．它在一个正方形内绘制了4个相同的直角三角形（每个的边长均为a、b、c）．确定里面正方形的大小，并用该图来

验证毕达哥拉斯定理.

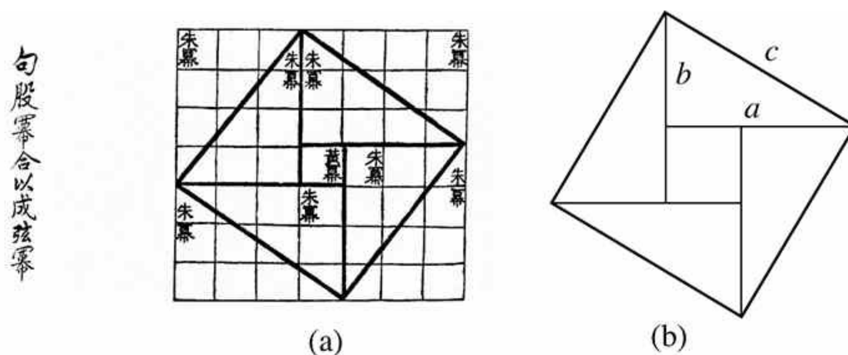


图**1-13　(a)** 是中国的勾股定理，选自《中国科学与文明》（***Science and Civilization in China***）第**3**卷：《天和地的数学与科学》（***Mathematics and the Sciences of the Heavens and Earth***），李约瑟（**Joseph Needham**）著，台北敦煌书局出版，**1986**，**p22**

讨论**1.1**　求解二次方程　二次方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 的解可由二次公式 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 给出．对该公式的证明需要使用配方法．它包含几步代数变换，如下文中二次多项式 $6x^2 + 28x - 80$ 的例子所示．

首先提取x^2项的系数，则 $6x^2 + 28x - 80 = 6\left(x^2 + \dfrac{28}{6}x - \dfrac{80}{6}\right)$．注意 $\dfrac{28}{6}x = \dfrac{14}{3}x$，$\dfrac{14}{3}$ 除以2得 $\dfrac{14}{6} = \dfrac{7}{3}$，其平方为 $\dfrac{49}{9}$．现在可将 $6\left(x^2 + \dfrac{28}{6}x - \dfrac{80}{6}\right)$ 写作 $6\left(x^2 + \dfrac{14}{3}x + \dfrac{49}{9} - \dfrac{49}{9} - \dfrac{80}{6}\right)$．重新结合得 $6\left[\left(x^2 + \dfrac{14}{3}x + \dfrac{49}{9}\right) - \dfrac{49}{9} - \dfrac{80}{6}\right]$．因为 $\left(x^2 + \dfrac{14}{3}x + \dfrac{49}{9}\right) = \left(x + \dfrac{7}{3}\right)^2$，则有

$$6x^2 + 28x - 80 = 6\left(x^2 + \frac{28}{6}x - \frac{80}{6}\right) = 6\left[\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 - \frac{49}{9} - \frac{80}{6}\right] = 6\left[\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 - \frac{169}{9}\right]$$

将 $6\left(x^2 + \dfrac{28}{6}x - \dfrac{80}{6}\right)$ 写成 $6\left[\left(x + \dfrac{7}{3}\right)^2 - \dfrac{169}{9}\right]$ 后，就完成了对二次多项式$6x^2 + 28$

x - 80的配方．现在就很容易求解 $6x^2 + 28x - 80 = 0$中x的值了．将 $6\left[\left(x+\frac{7}{3}\right)^2-\frac{169}{9}\right]=0$ 除以6，得到$\left(x+\frac{7}{3}\right)^2-\frac{169}{9}=0$．由于$\left(x+\frac{7}{3}\right)^2=\frac{169}{9}$，则有 $x+\frac{7}{3}=\pm\sqrt{\frac{169}{9}}=\pm\frac{13}{3}$．因此有$x=-\frac{7}{3}\pm\frac{13}{3}$，所以$x = 2$ 或$x=-\frac{20}{3}$．

问题**6**　按照以上步骤完成$4x^2 - 8x - 12$的配方．据此来求解$4x^2 - 8x - 12 = 0$中x的值．

问题**7**　完成多项式 $-5x^2 + 3x + 4$ 的配方．然后据此求解 $-5x^2 + 3x + 4 = 0$ 中x的值．同样处理 $-5x^2 + 3x - 4$ ．【注意：方程 $-5x^2 + 3x - 4$ 的解需要求负数的平方根．在本文中我们不考虑复数，因此认为这样的方程无解．】

问题**8**　用配方法验证 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ 的解的二次公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$．当$a = 0$时，会出现什么情况？

问题**9**　设x和d为任意正数．研究图1-14中的图形，讨论它们与配方法的联系．

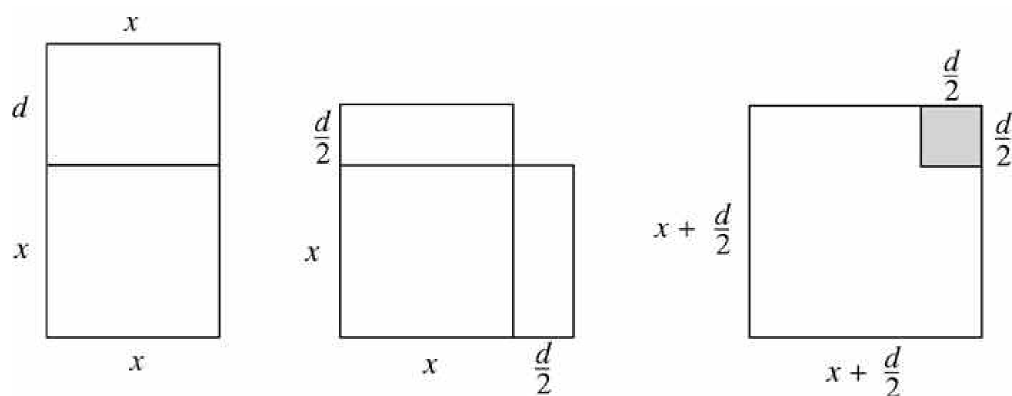


图　**1-14**

第2章　希腊几何学与罗马工程

公元前1000年初期，希腊城邦开始繁荣起来．独立、具有政治意识的商人阶级统治着爱琴海和意大利南部海岸沿线的商贸城镇．不断增长的贸易使他们生活富裕并和地中海沿岸及其他更远处的地方产生了联系．他们建立崭新的社会秩序并孕育了一种新的理性方法．他们不再接受神和半神控制自然并一时兴起就会发火的神话，而是意识到自己所观察到的现象依照理性的原则运行，其原因能被找出并为人所领会．希腊的政治家、哲学家、剧作家、雕刻家和数学家依靠这种精神认识并改变了现实．

希腊建筑是这种精神最明显的表现．希腊神庙的设计和施工既重视重要建筑构件的美观，也注意将各结构组成一个整体．柱子有柱础，柱身一般有垂直的长凹槽，随着高度的增加，它会逐渐变细，以便与上方的装饰部件相连接．成排的柱子支撑着刻花的水平构件，这些水平构件承载了三角形构件，三角形构件则负载着屋顶结构．人们规定一些部分的尺寸、间距以及它们彼此之间的比例关系的通用惯例．还发现一些原理和规律，它们起源于人类对几何学的认识．一些神庙拥有排列成圆形的柱子以及精心砌成螺旋图样的地砖．大型剧院建在斜山坡上，其座位由沉重的石板建造而成，并被排列成不断升高，不断加宽的半圆形．

公元前600年到公元200年左右，希腊智者在希腊及地中海沿岸的殖民地工作，这奠定了数学和科学的基石．他们的许多回答，如“一切物质都由土、空气、水和火这4种基本要素组成”都是错误或不完整的，但重要的是他们追问“一切物质都是由基本元素构成的吗？”，便提出了正确的问题．数学被认为是理解自然世界和设计万物的关键．公元前约300年之前，亚历山大（今埃及境内）因其伟大的图书馆成为此类活动的中心．学者在由国家支持用来进修的博物馆（司艺术和科学的缪斯女神的宅邸）内工作，研究天文学、数学和药学．

公元前约300年，欧几里得写出集大成的《几何原本》（*Elements*），这部综合论著建立在巴比伦人及其追随者毕达哥拉斯的数学基础上．它是一部结构严谨的作品，受到逻辑学推动，共分为13卷．欧几里得给出了10条陈述，作为公理或公设，是全书的核心部分．它们被放在书的开头部分，在一开始就受到严格检验．其余部分的内容则以几百个命题的形

式提出，涵盖平面几何学和数的性质的各个不同方面．现在的数学理论仍然遵循这种基本结构．阿基米德（公元前287年—公元前212年）是一位卓越的数学家、权威的物理学家以及著名的机械工程师．他发现了杠杆原理，即力的转动效应等于力的大小乘以它与旋转轴间的距离．他的流体静力学（hydrostatics，在希腊语中，hydro 表示“水”，statikos表示“静止”）定律给出液体对漂浮物体的推力等于物体所排开液体的重量．他在现代微积分学出现之前就用一些方法计算出平面区域和固体的质心（重心）．他还设计了用于军事的滑轮系统和石弩．阿波罗尼斯（公元前262年—公元前190年）写出了《圆锥曲线》（*Conic Section*）一书，这是对椭圆、抛物线和双曲线的一次全面研究．克罗迪斯·托勒密（约公元150年）在其希腊前辈的基础上，提出了定量三角学，他精心设计了一张圆形轨道的图表，该图表描述了以地球为静止观察点，太阳、月亮和行星是如何移动的．在哥白尼、伽利略和开普勒发现太阳是宇宙的中心并用阿波罗尼斯曲线描述了天体如何围绕太阳运行之前，他的这种天体运动论一直为人们所接受．

公元前约600年到公元400年，罗马文明紧随着希腊文明变得繁荣昌盛起来．公元前1世纪，罗马已把它的帝国扩展到整个地中海世界．罗马、希腊以及叙利亚的工程师、劳工大军以及由人和动物拖动的建筑机械发挥了重要作用．人们疏浚海港，建造码头，排干沼泽，创建经久耐用的路桥网络，设立大型的热水公共浴池，挖掘下水道．他们修建水渠，将水从数十公里远的泉眼引到市内．为了保证让水平稳流动所需要的高度和坡度，这些管道穿过山脉，架设在山谷上方．为了满足罗马人对公共表演的狂热，建筑师建造了剧场、竞技场和体育场．罗马建筑受到希腊原理和设计的极大影响，其共同特点是都有垂直的柱子、水平部件和三角形构件．不过，罗马建筑还大量使用曲线，用拱券和拱顶构筑空间．万神殿是一座带有大型圆柱形墙、宏伟的半球形穹顶、精美的门廊和古典内部装饰的神庙，它将罗马工程师的力量与希腊的审美形式结合在一起．混凝土的发明是关键．它容易倾倒、浇筑和成形，可以获得与石头类似的强度和弹性．《建筑十书》（*The Ten Books of Architecture*）是罗马建筑师维特鲁威在公元前1世纪开始写的一本著作，是流传给我们的唯一一本与古代古典建筑相关的作品．它成为我们了解希腊和罗马设计、构造方法和城市规划基本原理的重要信息源．

罗马数学局限于基本算术和实用几何学．罗马人清楚了解享有盛名的阿基米德及其辉煌成就．我们从维特鲁威的10本书中的一本知道了阿基米德惊呼“我找到了”的故事以及他所发现的方法．（这一著名传说回忆了

坐在浴缸里的阿基米德是如何意识到用流体静力学定律能解决王冠问题的．当他欢呼时，裸体跑过街道，并大喊“我找到了”．）考虑到罗马工程师设计与建造公共建筑和基础设施的规模与复杂性时，有一点让人十分吃惊，即他们对希腊几何学和三角学以及阿基米德应用数学的潜在价值好像都不感兴趣．

2.1 希腊建筑

民主希腊的城市雅典在公元前500年到公元前350年间达到鼎盛时期．这是伟大的政治家地米斯托克利和伯里克利，伟大的思想家苏格拉底、柏拉图和亚里士多德，伟大的剧作家阿里斯托芬、索福克勒斯和欧里庇得斯，以及伟大的雕刻家普拉克西特利斯和菲迪亚斯的时代．雅典建筑是对该城的伟大的视觉表现．

公元前5世纪，雅典卫城（Acropolis）内聚积了大量的神庙，它们矗立在雅典中心的石山之上．这里是雅典娜的圣地，她是该城的女守护神，是和平、智慧及艺术女神．这些神庙中最重要的一座是帕提农神庙，它是古典希腊时期最大的建筑之一．正如彩图4所示，帕提农神庙在山的顶峰．它由附近采石场出产的最好的大理石（石灰岩的一种）建造而成，面积为33.5米×76米，神庙前后两面都有8根柱子，侧面每边各有17根．雅典娜的大型大理石雕像镶嵌着象牙和黄金，俯视着神庙神圣的内部．其外部如图2-1所示．它是多里安柱式（Doric，一种以其创造者希腊多里安人命名的建筑式样）的一个范例，其特点是用坚固的柱子支撑大理石板．檐壁位于石板上方，它是一行水平安放的带雕刻的大理石部件．檐壁支撑着一种叫山花的三角形部件．大理石山花上装饰着希腊神话中狂欢场面的浮雕．目前只残留了几幅图像．山花上方是瓦屋顶，由沉重的木材支撑．承担沉重负载的柱子由一段段圆柱形部件，即圆鼓石堆叠而成．它们被精心制作，彼此之间几乎没有任何缝隙．其他大理石构件间的接缝也具有同样的精度．柱子彼此离得很近，它们底部较粗，随高度增加而逐渐变细．值得注意的是，柱子的粗细变化符合人们认真计算过的精密且相同的曲线．称为长凹槽的平行的垂直凹槽让其外表更美观．由相邻凹槽形成的锋利的脊线随着柱子的不断收缩上升而彼此逐渐靠近．在前排位于两端的两根柱子要稍微粗一些，与其他柱子靠得更紧．这就增加了该结构转角处的强度，同时也使得当光线透过角落照亮它们的时候，这些柱子看起来不那么纤细．帕提农神庙的矩形大理石地面不是平坦的，中间最高，然后向旁边倾斜，斜度很小但也能看得出来．这就意味着安放柱子的基座从中心的一个高点向末端的低点弯曲．如果不对竖立在这一基座上的柱子进行校正，它们就会向外倾斜．建筑师通过使柱子最底层的圆鼓石一边比另一边高（一些圆鼓石大约相差7.6厘米）来进行补偿．实际上，为了使柱子稍微向内倾斜，他们会多补偿一些，这样会更好地支撑沉重的负载．对这一神庙做过研究的历史学家们曾提出，帕提农神庙的建筑师们引入这些轻微弯曲和倾斜的部件

是为了使神庙看起来不那么刚硬，而是更有活力．虽然完全实现建筑师的想法是不可能的，但是这一结构本身就证明建筑师凭借他们与希腊几何学家相同的创造性和对完美的执着在不断前进．



图**2-1**　雅典的帕提农神庙，**Onkel Tuca**摄



彩图 **4**　雅典卫城，ccarlstead 摄

雅典卫城还有另一座让人印象深刻的神庙——厄瑞克提翁神庙，它以早期的雅典王厄瑞克透斯命名．在彩图4帕提农神庙的左侧可看到它．它的门廊（一种廊式结构，特点是有柱子，通常附属于一座建筑物）的屋顶由6个优雅的女性形象的雕像所支撑．历史学家称这6个女性雕像承担了沉重的负载，这是一种对卡利亚城邦的象征性惩罚，因为他们在一场与希腊的战争中支持波斯人．厄瑞克提翁神庙将不同的风格和标准相结合，包括爱奥尼亚式和科林斯式部件，并发展成为一件衔接很好的古典作品．爱奥尼亚式和科林斯式建筑样式由爱奥尼亚和科林斯的希腊人传入，是多利安式的演变，它们更华丽、更纤细．

雅典卫城每年举行一次活动，庆祝雅典娜女神的生日．一个目击者叙述了这一盛况．成千上万兴高采烈的雅典人，包括穿藏红色和紫色长袍的女人、骑士、乘战车的战士和冠军运动员等，其中一些人拿着祭祀用的火炬和盛供品的银盘，随祭祀队伍爬上山顶．卫城的建筑师有意使庆祝的人群在沿着指定路线前进的同时，如同观赏建筑方面的戏剧表演一样，能有一次不断展开的与建筑物结构相关的视觉体验．同样的空间考虑也影响了雅典娜市场（agora，在希腊语中，agora意为“市场”）的规划，它位于卫城脚下，是城市居民生活和商业活动的中心．建筑的高度、长度和宽度以及柱子间隔和各个构件与整体之间的比例都受到通用规范的限制．在城市规划时，建筑师对公共与市民建筑、神殿与神庙、纪念碑、人造喷泉和矩形长廊（stoa，用于集会或散步的大型门廊）之间的空间关系均进行了仔细的考量．

公元前4世纪，埃皮达鲁斯（在雅典南部伯罗奔尼撒半岛上）的两座建筑物展现了希腊建筑与几何学之间的联系．埃皮达鲁斯圆形神庙是一座圆形有柱廊的建筑，功能未知．（tholos，在希腊语中指多种不同形式的这类古典圆形建筑物．）残留的地基和地板碎片被人们发掘并重新拼合起来．图2-2的下半部分展示了地板砖复杂的几何图案（图的上半部分绘出了部分天花板）．黑色圆盘排成两个圆形，代表柱子的位置．外圆的直径约22米．内部的圆形墙的直径约13.7米．埃皮达鲁斯剧院建于公元前360年，座位区能容纳14 000人，如图2-3所示．该剧院以山坡上凿出的石块为座位，这些座位共同构成一种不断增大并升高的半圆形图案，最大的一个半圆的半径约为61米．至今，该剧场仍可以为夏季古代希腊戏剧表演项目提供戏剧布景．

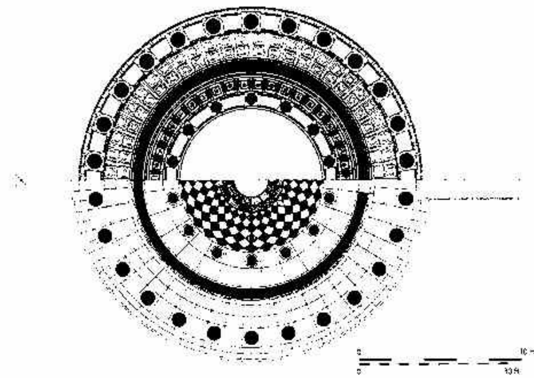


图**2-2**　希腊埃皮达鲁斯圆形神庙



图**2-3**　希腊埃皮达鲁斯剧院，**Olecorre**摄

希腊建筑工人有好几种方法可用来解决移动和放置建筑中的沉重构件时遇到的困难．移动圆形柱子时，他们在柱子两端插进铁钉，用驮畜拉着它滚动．移动矩形厚板时，他们先造出沉重的木头轮子，然后套到板的两端，再用同样的方法滚动．人们把沉重的石板拖上由沙子或松软的泥土堆成的斜坡，等它们到达适当位置后，再将沙子或泥土去掉．后来，

希腊人发明了由绳索、卷轴、滑轮和绞盘系统构成的起重机，能将重物吊起并放到指定位置．它们还武装了用于战争机器的机械装置，用来围攻有城墙的城市．

几个世纪以来，断断续续的战争以及公众机构的漠不关心使辉煌的希腊建筑，尤其是帕提农神庙受到忽视和损害．公元5世纪，帕提农神庙被用作一座基督教堂，雅典娜雕像及内部许多柱子被移走．15世纪，雅典败给土耳其人之后，帕提农神庙变成清真寺．17世纪，土耳其人在与威尼斯人的战争中用它来储放军需品．威尼斯舰队的炮火引发一场爆炸，将其内部墙壁震裂．19世纪初，在土耳其占领雅典的末期，英国埃尔金勋爵从土耳其人手里获得购买檐壁的权利．他把这些精致的艺术品切割下来，运到英国，现在保存在伦敦的大英博物馆中．在保护较好的角落里发现的原始绘画的痕迹告诉我们，檐壁用生动的色彩绘制，其外表与我们今天见到的雅致的白色大理石迥然不同．人类和时间未曾毁灭的地方如今又受到汽车尾气的威胁，它们会损害大理石的表面．人们作出大量的努力来修复并保存这一建筑．如今帕提农神庙残留的只是它以前的一丝余晖，然而，它还是不断提醒我们西方文明植根于古希腊．一些现代城市中有许多建筑都具有帕提农神庙的风格，它成为受到最多模仿和赞美的古代神庙．

2.2　几何学之神

在希腊建筑中到处都能看到基本几何图形．在构造建筑物时，希腊人把绳索系在钉子上，将其拉直并旋转，从而画出他们设计的直线和圆弧．希腊的几何学家将这种实践进行抽象，将其发展成对尺规作图的研究．这一研究收在欧几里得的《几何原本》里．让我们从卷1的两个基础作图看起．

从图2-4(a)开始．用直尺（没有刻度的标尺，不能测量长度）画出一条线段AB．将圆规的一只脚放在A点，另一只伸到B点，画出一个圆弧，如图所示．然后以B为中心，以同样的半径画另外一条圆弧．设C为两条弧的交点，这样就用尺规作出了等边三角形ABC．为什么角A、角B和角C均等于60°？（答案将在本章末问题1和问题2中得出．）现转向图2-4(b)．设$\angle AOB$为任意角．将圆规放在O点，画一条经过该角的圆弧，令C和D为圆弧与线段OA和OB的交点．将圆规的脚分别放在C和D点，画出两个半径相同的圆弧．设E是这两条弧的交点，则从O到E的线将$\angle AOB$分成两部分．（见问题3．）这样用尺规将$\angle AOB$进行了等分．

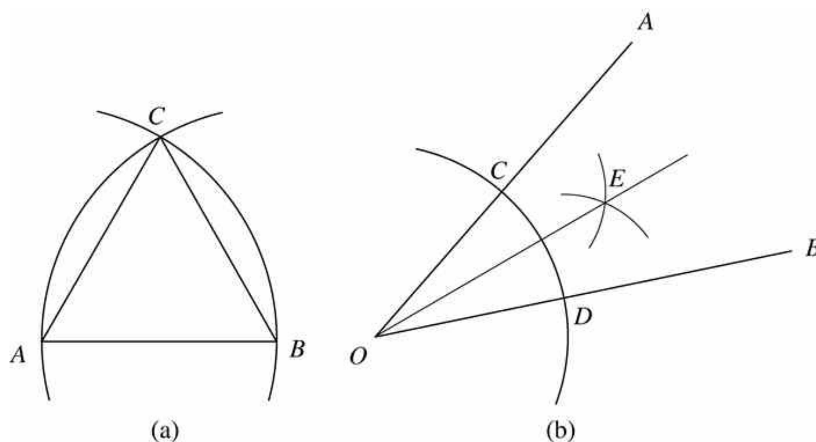


图　**2-4**

在第6卷中，欧几里得解释道：“一条线段被分割时，若整条线段与分割后的长线段的比等于长线段与短线段的比，则称这条线段以‘中外比’分割．”让我们从数学角度看一下这段话的意思．图2-5画出了一条被分成两部分的线段．其长度是a和b，且$a \geq b$，则线段的总长是$a + b$．欧几里

得认为如果$a+b$与a的比等于a和b的比，即$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$，则该线段以“中外比”分割．注意此时

$$\frac{a}{b}=1+\frac{b}{a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}+1$$

将此方程乘以$\frac{a}{b}$，可以看出$\frac{a}{b}$是多项式x^2-x-1的根．用二次公式可求得$\frac{a}{b}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$．由于$\frac{a}{b}$为正数，可得$\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．



图　**2-5**

在现在的术语中，这样的分割是黄金分割，比率$\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$是黄金分割率．（这一比率也被称为神圣比率．）数学上习惯用希腊字母φ表示黄金分割率．一般人们声称这是对伟大的希腊雕塑家菲迪亚斯的纪念，据说他使用了黄金分割率．当然，这种比率本身确实引人注目，按照规定，它要求整体与较大部分的比等于较大部分与较小部分的比．

我们根据惯例，用小写希腊字母φ表示黄金分割率．则有

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

φ因为是多项式x^2-x-1的的根，则

$$\phi^2=1+\phi,\quad \phi^{-1}=\phi-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

用计算器计算可得$\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618\,033\,989\cdots$．

如果矩形的边长比率符合黄金分割率，则该矩形为黄金矩形．用尺规作出黄金矩形的方法如图2-6所示．设*b*为任意长度，以*b*为边长先画出一个正方形．可以通过平分180°角（给定一条直线及其上的一个点）得到需要的90°角，过程见图2-4(b)所示．现在找出正方形底边的中点，将圆规的脚放在该点上，将另一只脚沿虚线拉到正方形上面的一个角上．由毕达哥拉斯定理可知，该虚线的长度为$\sqrt{\frac{b^2}{4}+b^2}=b\frac{\sqrt{5}}{2}$．向下旋转这一圆弧直到它与正方形底边的延长线相交．取该交点所确定的线段，完成图中所示的一个矩形．设*a*是该矩形的底边，注意$a=\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}b=b\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$．因为

$$\frac{a}{b}=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}=\phi$$

该矩形为黄金矩形．考虑黄金矩形的底边．正方形的右侧边将其分割成较长的线段*b*和较短的线段*a*-*b*．因为

$$\left(\frac{b}{a-b}\right)^{-1}=\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}-1=\phi-1=\phi^{-1}$$

则有$\frac{b}{a-b}=\phi$．这一分割是矩形底边的黄金分割．

这一构造也告诉我们对任何线段而言在哪里“下刀”才能进行黄金分割．设*AB*为一条线段，将图2-6的构造添加到它身上，如图2-7所示．从黄金矩形底边的右端点*D*出发，画一条线，连接线段*AB*的右端点*B*．过点*P*构造一条它的平行线（如何构造平行线见问题6）．这条平行线确定了线段上的*C*点．根据相似三角形的基本性质（见问题16及该问题的引言），有$\frac{AB}{AC}=\frac{a}{b}=\phi$．因为$\frac{CB}{AC}=\frac{AB-AC}{AC}=\phi-1=\phi^{-1}$，$\frac{AC}{CB}=\phi$．因此$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$，*C*处的分割是黄金分割．

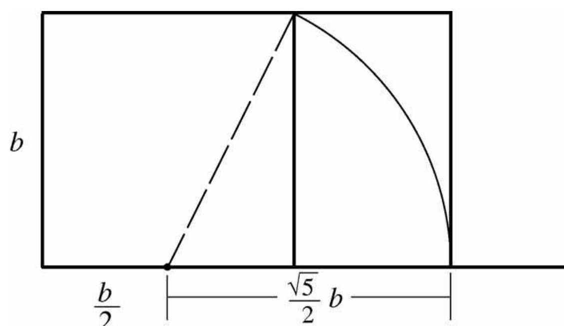


图 **2-6**

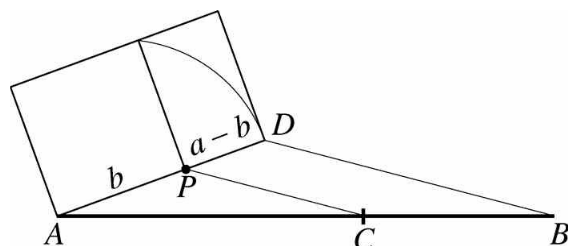


图 **2-7**

以上提出的这些所有构造均可以只通过一个用来画圆弧的圆规（这是对钉子和绳子作用的抽象）和一把连接端点的直尺（这是模仿两个钉子间拉长的那条绳子）来实现．任何尺规作图都必须满足只能使用上述两种工具的要求．

平面内的一个多边形包含多个点，这些点通过线段进行连接，从而形成一个闭环．图2-8(a)给出了一个典型的例子．称点 V_1 、 V_2 、 V_3 等为顶点，连接它们的线段为边．图2-8(a)中的多边形有10个顶点，则被称为十边形．如果一个多边形有*n*个顶点（或*n*条边），则为*n*边形．如果所有的边长都相同，所有的内角 α_1 、 α_2 、 α_3 等均相等，则该多边形是正多边形．图2-8(b)展示了一个正七边形．它是通过在一个圆周上等距离分布点 $V_1,V_2,\ldots,V_7$ 得到的．因为圆被等分成7份，则每个圆心角的度数都是 $\frac{360}{7}$ ．

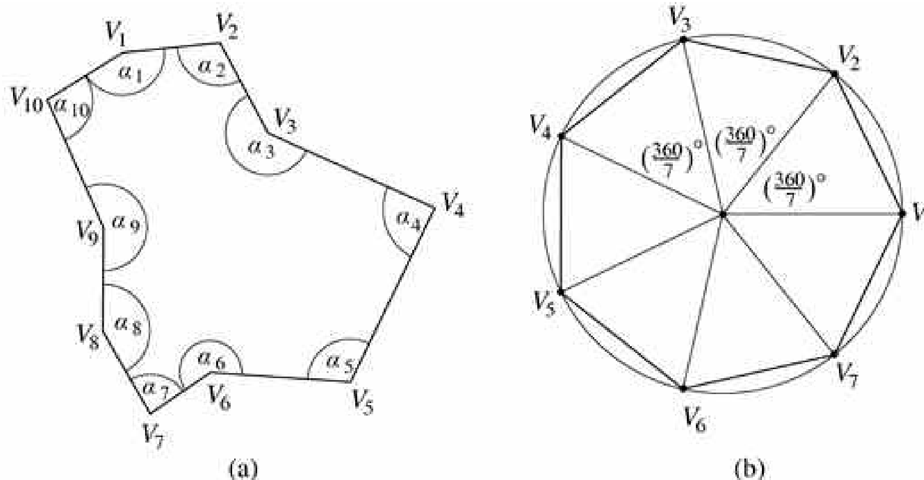


图　**2-8**

我们回头来看能用尺规构成哪些正多边形．图2-4(a)告诉我们如何构造等边三角形．构造黄金矩形是从构造正方形开始的．因此，正三角形和正四边形都能用尺规构造．构造正*n*边形最直接的方法是构造$\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$角．如果能构造出这个角，就能在一个圆上标出*n*个等距离分布的点．用线段连接圆上相邻的点就能画出正*n*边形．例如，构造等边三角形时构造了60°的角，连续划分出60°角，得到点 H_1、 H_2 、 H_3 、 H_4 、 H_5 、 H_6 ，如图2-9所示，这样就构造出正六边形，即六方形．平分90°角得到45°角，重复划分45°角可确定图2-9中的点 $O_1,O_2,\ldots,O_8$ ，因此构造出正八边形．

还能构造正五边形．首先如图2-6那样构造黄金矩形．在图2-10中，分别以*A*和*B*为圆心，以*b*为半径画两条圆弧．点*C*为两条弧的交点．可以证明$\angle CAB = 72^\circ$．因此，可以构造出72°角．5次标出这一角度，得到图2-9中的 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 ．因为 $5\times72^\circ= 360^\circ$，这样就完成了正五边形的构造．

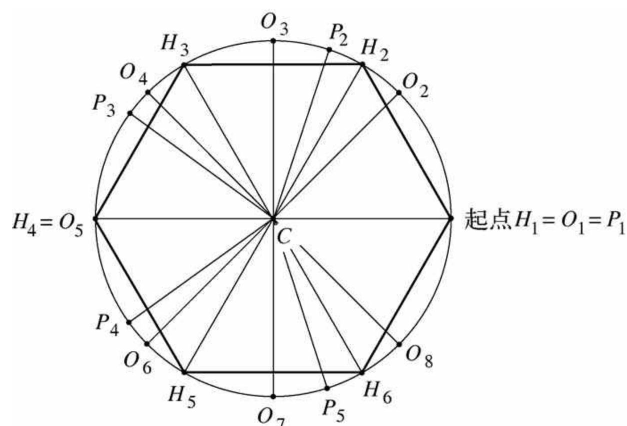


图　**2-9**

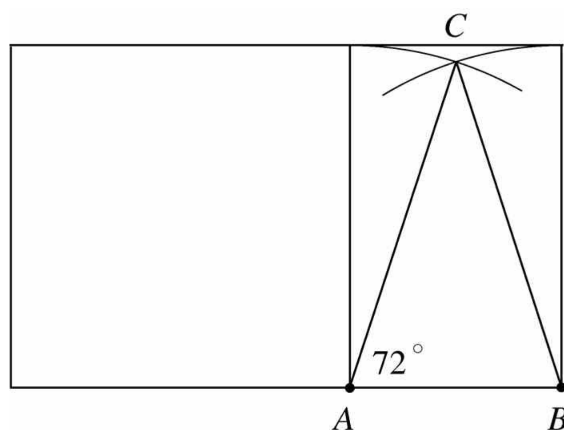


图　**2-10**

不过我们怎么知道$\angle CAB=72°$？详细答案有些复杂，但主要的原因如下．首先看图2-11(a)中位于中心的正五边形．（不能假设该五边形能被构造，而且它也不是被构造出来的，否则说明你正在假设需要进行证明的结论成立．）点O是五边形的5个顶点所在的圆的圆心．因为$5\gamma=360°$，内角γ等于72．根据等腰三角形的基本性质，$\beta=45°$，则有$2\beta=108°$．现在用该五边形完成一个五角星．转到图2-11(b)，像图中那样标出点A、B、C和D．注意$\angle CAB$=72．现在到了最难的部分，即需要证明以DA为一条边的正方形沿线段AB拉长后得到的矩形是黄金矩形．讨论2.2详细描述了欧几里得在他的《几何原本》中是如何做到的．剩下的就简单了．线段DA和AC长度相等表明图2-10和图2-11(b)中的三角形ABC是用同样的方式获得的．因此，图2-10中的∠CAB确实等于72．

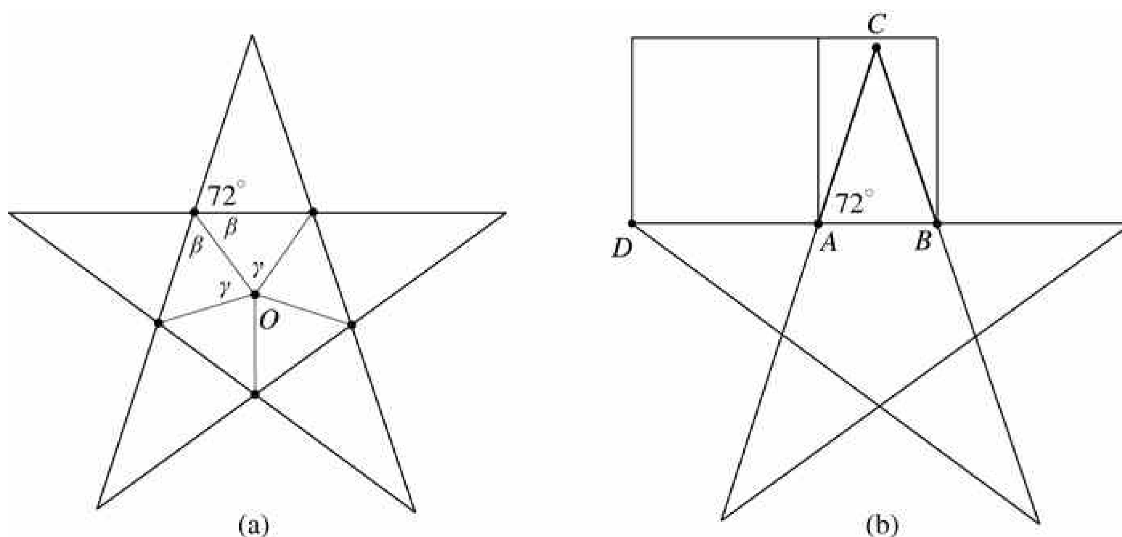


图　**2-11**

现在我们已看到边数为3、4、5、6和8的正多边形都能用尺规构造出来．这一事实提出了一个有趣也非常难的问题：正多边形的边数，即正整数*n*为何值时，能用尺规进行构造？直到19世纪，数学家们才向着答案的方向迈出了一大步．只有当这一几何问题转化为高等抽象代数问题（尤其是转化成系数为有理数的多项式的根的问题）之后，它才被彻底解决．例如，该方法指出，边数从3到1002的正多边形中，换句话说，前1000个正多边形中，那些边数为如下所示数值的可以被构造出来，而其他的都不能．

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272, 320, 340, 384, 408, 480, 510, 512, 514, 544, 640, 680, 768, 771, 816, 960

数一下就知道，1000个正多边形中，只有52个是能被构造出来的．因为7不在其中，则图2-8(b)中的正七边形不能被构造．因为9不在其中，则正九边形也不能被构造．注意这张表中，数字的间隔很大．这些及其他相关的事实远远超出了本文的目标和范围，不过在讨论2.3中还会略有提及．

正如我们已注意到的，希腊的建筑实践明确地影响了希腊几何学的发展方向．反之，希腊几何学，如三角形、半圆形、圆，也在其伟大建筑中得到了表达．不过影响有多深？在建筑设计或施工时，希腊建筑师试图坚持精确的数学比例或严格的几何关系吗？人们一般用帕提农神庙作为

例子，说明他们确实是这样做的．证据如图2-12中的框图所示．帕提农神庙正面的许多黄金矩形能告诉我们希腊人将黄金矩形作为一个模板吗？他们是如何选择矩形和正方形的，而这种选择的相关性如何？它们的位置如何确定？精确度又如何呢？这是证明他们有意使用黄金矩形来完成设计的有力证据吗？还是黄金矩形只是人们事后强加到建筑立面的？不管是作为数字还是通过构造得到的黄金分割率都是非常准确的．具体而言，它不等于$\frac{3}{2}=1.50$或$\frac{5}{3}\approx 1.67$，也不等于$\frac{8}{5}=1.60$．并没有决定性的证据证明希腊建筑人员在建筑设计和实施时遵循了精确的几何关系．实际上，图2-2中埃皮达鲁斯圆形神庙的平面图表明他们没有这样做．注意，这张平面图的特点是14根柱子排成的内圆和26根柱子排成的外圆．标出这些圆柱位置的圆的圆心分别是十四边形和二十六边形的顶点．因为14和26均未出现在上文提到的边数列表中，因此我们知道不可能构造出正十四边形或正二十六边形．如果说精确的施工对希腊人而言很重要，在布置这些圆柱时，他们难道不应该使用正十二边形和正二十四边形吗？他们知道如何用钉子和绳子精确构造这些多边形，只要先作出正六边形，再使顶点数加倍两次就可以了．



图**2-12**　使用黄金比率的帕提农神庙，**Padfield**摄

15世纪，文艺复兴时期的建筑师提出并开始使用比例数学系统．他们依照固定的数字比例，整理了建筑构件的各种尺寸，包括柱子、支撑柱子的柱础以及柱子所支撑部件的粗细和长度．5.2节及讨论5.1中会提到这部分内容．

2.3 测量三角学

聪明的希腊人能从他们称为三角学（trigonometry，在希腊语中，trigono意为“三角形”, metrein意为“测量”）的基础三角形研究中获得大量的信息．我们假设有一个好奇的希腊旅行者到了埃及，看到了金字塔．他对金字塔的规模产生了兴趣，他会步测底座的边，确定它的尺寸．接着他的注意力转到金字塔的高度上．在明媚的夏日午后，他步测从金字塔的一条边到它投下的阴影顶点处的距离，估计出从金字塔基座中心到阴影顶端的长度为310步．我们的旅行者知道他的身高为3步，测得他的影子长度为5步．利用现有的信息，他会在沙上画出如图2-13中所示的图形．三角形*ABC*代表金字塔，高为h．两条斜线代表从太阳发出的用于形成阴影的光线．我们的希腊旅行者通晓相似三角形的知识，知道 $\frac{h}{310}=\frac{3}{5}$．这样他可以得出金字塔的高度约等于 $h=\frac{3\times 310}{5}=186$ 步．这个旅行者有可能与描写过巴比伦的辉煌的希罗多德是同一个人．他的编年史回忆了自己在公元前5世纪参观胡夫大金字塔（见图1-6）的经历，并记录了一些它的尺寸．

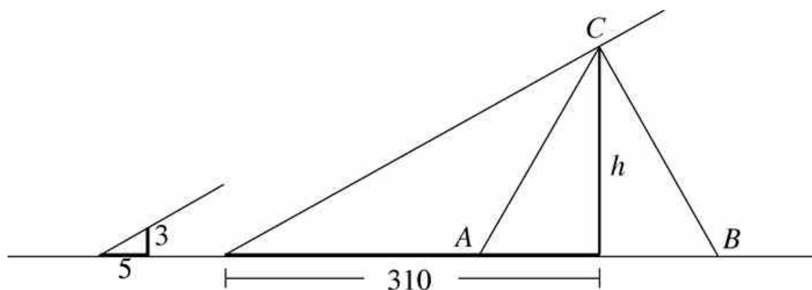


图 **2-13**

图2-14考虑了一个直角三角形，其锐角为α、β．希腊人理解正弦、余弦和正切之间的比值关系，并有自己的术语和符号．按现在的定义它们可以分别记为：$\sin\alpha=\frac{a}{c}$，$\cos\alpha=\frac{b}{c}$，$\tan\alpha=\frac{a}{b}$．他们提出了标准三角恒等式．例如，因为 $\sin\beta=\frac{b}{c}$，$\cos\beta=\frac{a}{c}$，$\tan\beta=\frac{b}{a}$ 且 $\beta=90°-\alpha$，可知

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,\ \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,\ \tan(90^\circ-\alpha)=\frac{1}{\tan\alpha}$$

他们还发现

$$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$$

可直接由毕达哥拉斯定理得出.

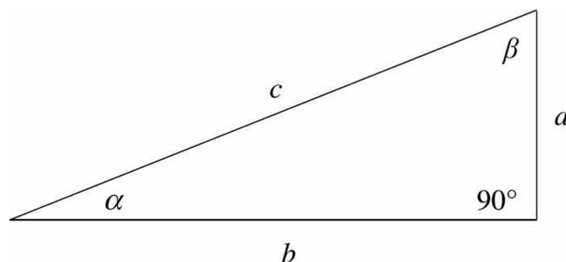


图　**2-14**

考虑图2-15所示的两个三角形．应用毕达哥拉斯定理，图2-15(a)中的三角形的底边长为$\sqrt{2}$．接下来可得$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$．再应用毕达哥拉斯定理，图2-15(b)中的等边三角形的高*h*满足$1^2=h^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$．则有$h^2=\frac{3}{4}$，$h=\frac{\sqrt{3}}{2}$．则有$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

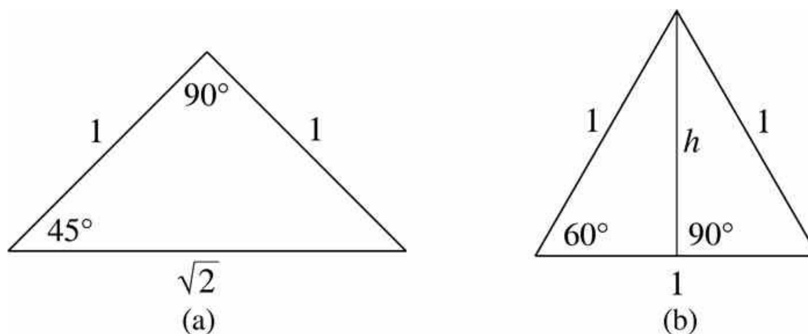


图　**2-15**

给定一个三角形，其角为 α、 β、 γ．如果 $\beta+\gamma<90°$，则有 $\alpha>90°$．这种角不能应用图2-14给出的正弦、余弦和正切的定义．为了将正弦、余弦和正切的定义推广到任意角α（$0°\le\alpha\le180°$），可做如下处理．设任意角α，将其放在半径为1的半圆中．如果 $0°\le\alpha\le90°$，则如图2-16(a)所示，定义 $\sin\alpha=h$， $\cos\alpha=b$．这和我们之前所知的一致．如果 $0°\le\alpha\le180°$，按图2-16(b)所示的进行，定义 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 为

$$\sin\alpha=h，\quad \cos\alpha=-b$$

任何情况下均定义正切为 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$．令 α 满足 $0°\le\alpha<90°$，则有 $180-\alpha>90°$．考虑图2-16(a)中的 α 和图2-16(b)中的 $180°-\alpha$．研究这两个图形，并证明这两个直角三角形相似，因此有

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha,\ \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$$

例如 $\sin120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $\cos120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos60^\circ=-\dfrac{1}{2}$．

希腊人对数学的贡献简直让人大吃一惊．他们使几何学公理化，也就是说，他们将其作为数学结构，从几个核心定义和命题出发，将其他的所有知识都以一种紧密、严格、合理的方式进行展现．他们研究了椭圆、抛物线、双曲线，使用与解析几何及现代微积分（我们将在4.1节看到）联系极其紧密的方法，提出这些曲线的基本性质．他们还提出一种应用天文学．通过每天测量阴影（用与希腊旅行者类似的方法），希腊人确定了夏至日和冬至日，测量出一年有365.25天．通过延长地球、月球和太阳之间构成的三角形并应用他们的三角学，他们感知这些天体的大小以及彼此之间的距离．当代数学和天文学均建立在希腊人打下的基础上．

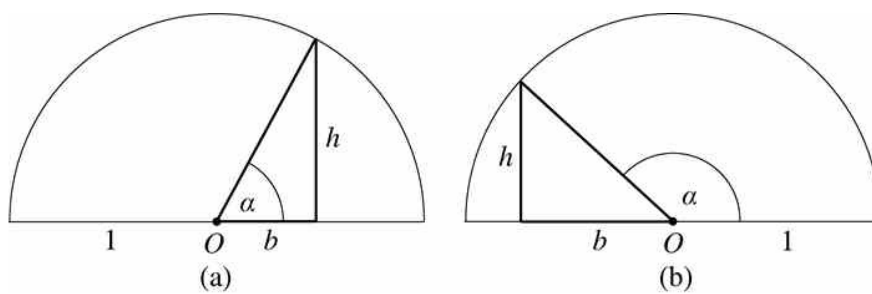


图　**2-16**

2.4　对力的处理

现在该分析结构表面以及内部所受的力了．考虑每天都会遇到的拉力或推力，尤其是建筑结构的一个构件施加到另一个构件上的推力或拉力．每个建筑结构都受到力的作用．重力（以建筑物部件重量的形式存在）是恒久存在的关键作用力，不过风、热和地震产生的力同样具有重要影响．古代建筑师清楚地认识到力的存在，对其影响有着本能的理解，但他们不能按照本节所用的清晰、定量的方式来对力进行处理．分析力的概念超出了希腊建筑人员和罗马工程师的知识范围．

回顾图1-6．考虑任意一座金字塔中的任意一块典型石头．上面石块的总重量向下加到它的上表面，使其受到挤压，如图2-17所示．这种挤压受到石块内部结构的抵抗．这些与结构上的负载相反的内力称为反作用力．金字塔底部的一层石块给下面的地面施加压力．它所导致的任何结构上的移动都被称为沉降．不均衡的沉降会产生致命的断层和结构破坏．而这在图1-6中的金字塔上并没有发生，这是由于它们建立在天然石灰石地基上．这种岩石能承受每平方英尺（0.093平方米）100吨的负载．但是，其他埃及金字塔沉降并不均衡，在建设过程中或建设完成后，都遭到了严重的损害．

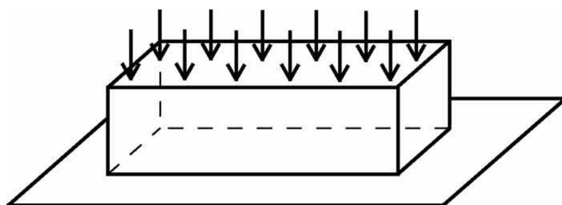


图　**2-17**

埃及人和希腊人建造神庙时用到的基础结构是柱和梁．这种结构包括两根垂直的柱子，它们支撑一根水平的梁，如图2-18所示．这种基础结构给我们带来了帕提农神庙和其他壮丽的希腊和埃及建筑．巨石阵（如图1-5所示）提供了早期的范例．柱梁结构有局限性，尤其是用石头施工的时候．一般而言，柱子没有什么问题．放柱子的地面可以用石头或砌筑墩基加固，它将载荷平均分配给下层土．梁对柱子向下的压力与柱子对梁向上的反作用力相同．梁的重量使柱子受到挤压，但石头能承受很大的挤压力，如图2-19(a)所示．但柱子之间的梁的情况又如何？除了石头内部的阻力，没有其他的力来抵消梁的重量．梁被其自身的重量向下

拉，在此过程中，哪怕非常轻微，其底边也会被拉伸（上边则被挤压），如图2-19(b)所示．这一拉力是一种张力，它使所作用的构件受到拉伸．尽管石头耐挤压能力极强，但抗拉伸能力却要差得多．换句话说，把石板压碎的力要比拉断所需的力大得多．（图1-9展示了一个倒塌的残缺法老王雕塑，为上述事实提供了一些证据．）如果支柱彼此离得太远，梁底部的拉力就会大得超出石头的承受力．石头会断裂，梁会倒塌．因此，只有柱子彼此靠得很近时（如彩图3所示），石制的柱梁才能支撑沉重的大型屋顶结构．所以，柱梁结构的净跨度不可能很大．我们后面很快就会看到罗马人用拱形结构改变了这一切．但在我们讨论拱形结构前，先定义研究力的方法．

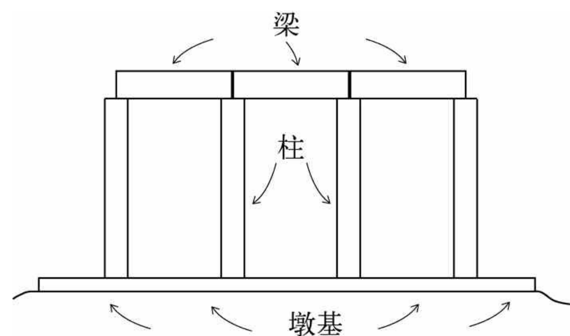


图　**2-18**

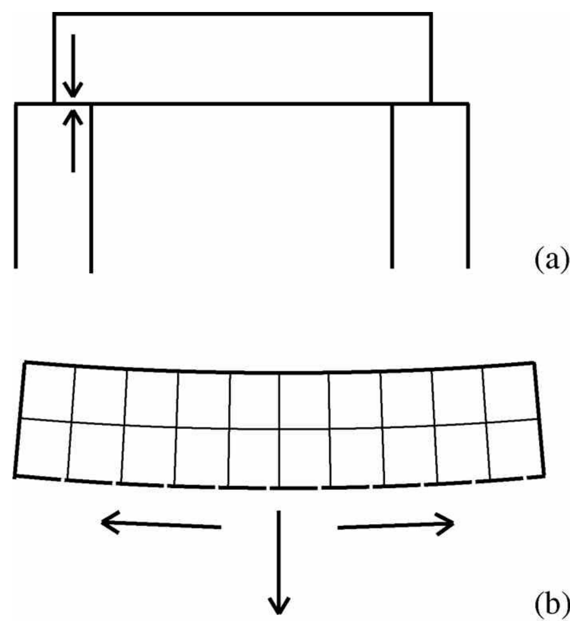


图　**2-19**

力有大小和方向．大小和方向共同确定一个力．在结构研究中，力用箭头表示，称为向量．当用向量表示力时，向量指向力的方向，如图2-17和图2-19所示．为了表示力的大小，需要给出长度的单位（如英寸、英尺或米）和力的单位（如磅或吨）．[1]（顺便提及，磅的通用缩写“lb”源自古代罗马重量单位的名字libra．）大小为x单位的力由长度为x单位的向量表示．这样力的大小在数值上等于表示它的向量长度．例如，在图2-20(a)中，向量A代表1000磅水平向左的力．同样，图2-20(b)中向量B代表10磅水平向右的力．更长或更短的向量按比例代表更大或更小的力．假设图2-19(a)中梁对柱子向下的压力是2000磅，与柱子向上的反作用大小相等．图2-20(a)考虑了力的方向和大小，画出了这两个垂直向量．图2-20(b)展示了不同大小的力的情况．比如，垂直向量可能代表一个重120磅的妇女施加在地面上的重力．这组图里的第二个可能表示一个重50磅的物体受到沿对角线斜向上的30磅的力．你能想象出一圈5磅的力推一个点的情形吗？我们下面将要讨论的力，其方向根据上下文可以明显看出，因此我们用大小字母 F_1,F_2,F_3 或 P_1,P_2,P_3 表示力的大小．当我们提到力F以这种或那种方式起作用时，力的方向将会很容易看出，通常F指其大小．

1 1英寸≈0.025 4米．1磅≈0.453 6千克．——编者注

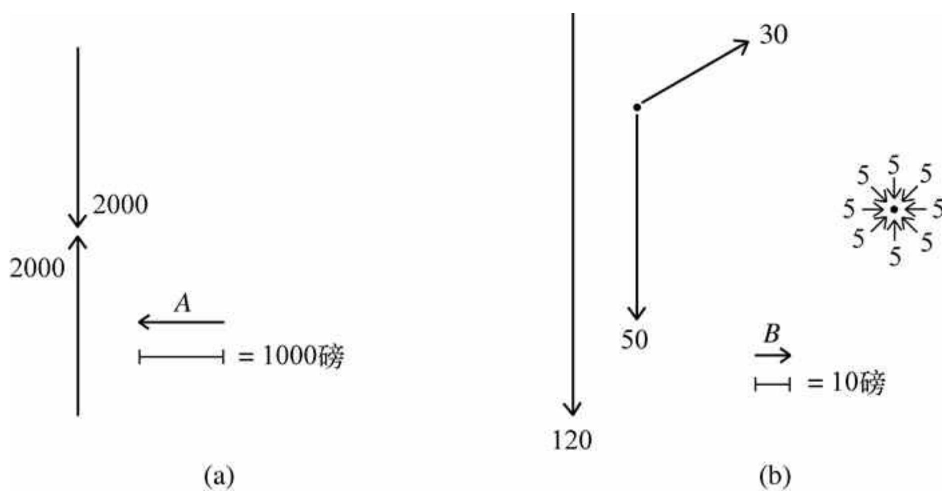


图　**2-20**

考虑大小为F_1和F_2的两个力作用在同一点上．二者的合力如何？如果这两个力同一方向，则合力大小为 $F_1 + F_2$，方向相同．如果两个力的方向完全相反，则合力的方向与较大的力相同．如果F_1较大，则合力的大

小为 F_1 - F_2．一般而言，按如下方法确定两个力的合力．确定代表两个力的向量的位置，使它们的起点相一致．如图2-21(a)所示，这样就确定了一个平行四边形，从它的公共起点出发的对角线确定了一个向量．该向量代表一个力，这个力不管从方向还是大小上都是前两个力的合力，即合向量．这就是平行四边形法则．图2-21(b)和图2-21(c)表明将两个向量的起点和终点相连，也能获得合向量．图2-21(d)给出了用数字表示的一个例子．大小为40和75的两个向量互相垂直，则意味着其合力的大小可以通过毕达哥拉斯定理得到，为 $\sqrt{40^2+75^2}=\sqrt{7225}=85$ 磅．

如果几个力作用在同一个点上，则其合力可以通过逐一应用平行四边形法则确定．考虑图2-21(a)和图2-22(a)中的4个力 F_1、 F_2、 P_1、 P_2．第一对力的合力为图2-21(a)中的力F，第二对力的合力为图2-22(a)中的向量P．通过运用平行四边形法则，可得F和P的合力为图2-22(b)中的Q．任意多个向量的合向量都可以通过将它们按任意顺序将起点和终点相连得到．图2-22(b)中图形的外层折线展示了如何通过这种方法得到 F_1、 F_2、 P_1、 P_2的合力Q．

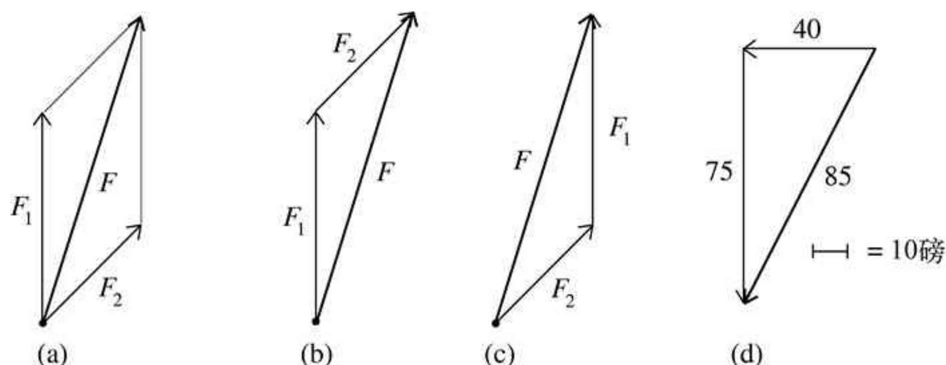


图　**2-21**

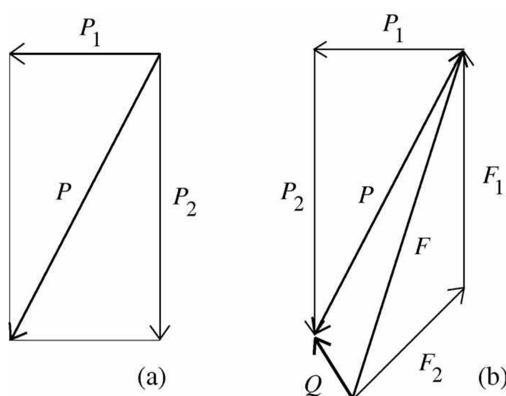


图　**2-22**

重要的是，合力的大小在数值上总是等于用来代表它的向量的长度．这意味着用向量来表示力不仅是一种研究力的简便方法，它还给出了一条认识力的作用方式的重要途径．

给定力F．图2-23(a)中用虚线确定了一个方向，角表示虚线与力的方向间的夹角，其中$0° \le \theta \le 90°$．图2-23(b)从向量力F的起点出发画一条垂直于虚线的垂线，将垂线所确定的向量加入．该向量代表力F在θ方向上的分量．如果l是该向量的长度，则$\cos\theta = \frac{l}{F}$．F在θ方向上的分量大小为$F\cos\theta$．为了记住这一分量的大小由余弦而非正弦给出，可以认为该分量从某种意义上说，与原来的力相邻[2]．同样，力在方向$90°-\theta$上的分量大小为$F\cos(90°-\theta)$．应用2.3节里基本的三角恒等式，它也等于$F\sin\theta$．图2-23(c)表明F的这两个分量确定了一个矩形，F在矩形的对角线上．根据平行四边形法则，这两个分量的合力等于原来的力．

2 adjacent，相邻，其英文读音与余弦的英文读音相近．——译者注

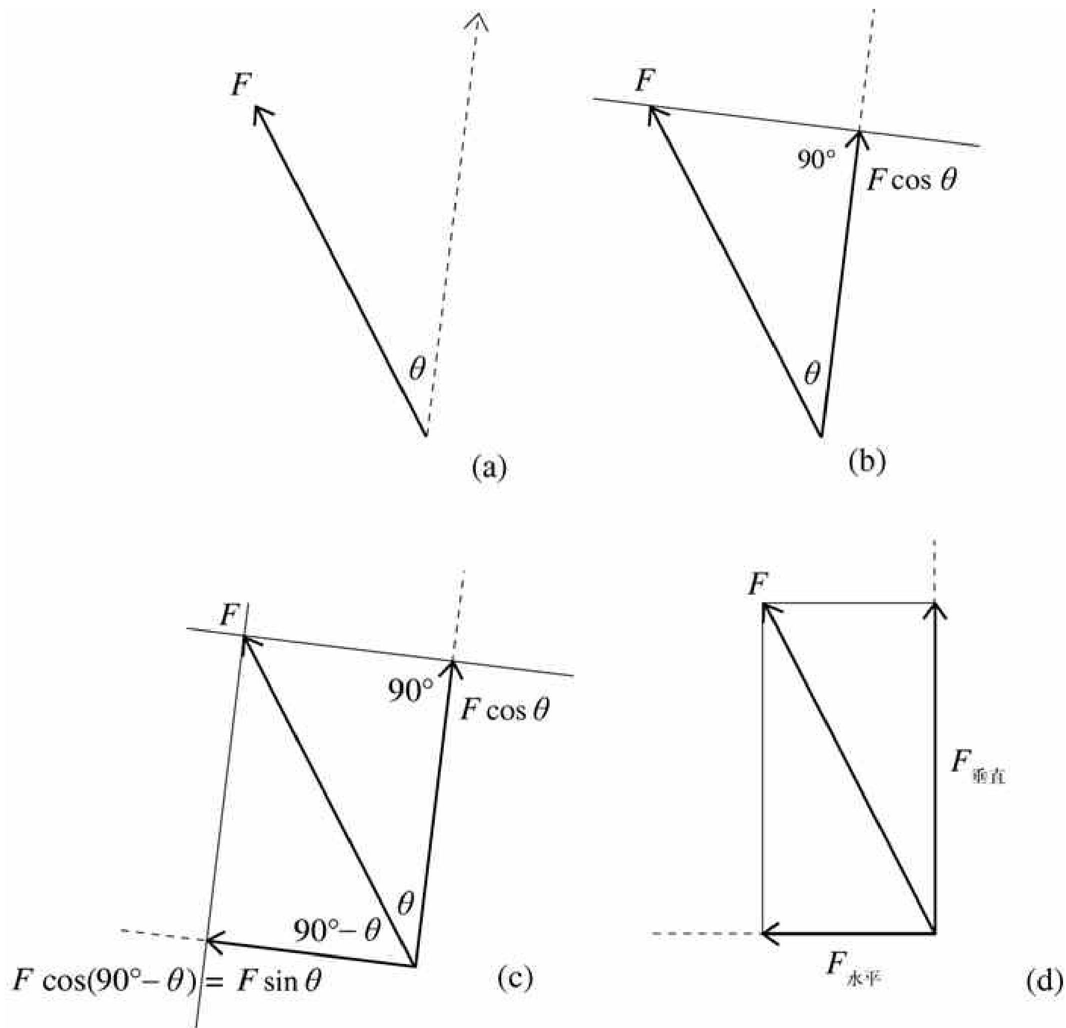


图　**2-23**

将力分解成分量　设给定一个大小为F，方向为θ的力，其中 $0° \leq \theta \leq 90°$．则F在方向和与垂直的方向上的分量大小分别为

$$F\cos\theta\ ，\ F\cos(90° - \theta) = F\sin\theta$$

这两个分量的合力是原来的力．图2-23(d)演示了这类分解的一种最重要的情况：力F的两个分量是垂直和水平分量．

只有金字塔的每一个石块用同样大小的力抵消重量对它的向下的压力，它的结构才能稳定．同样，柱梁结构要可靠，需要柱子有向上的力，其大小应等于负载对它产生的向下的力，除此之外，梁的制作材料的内部结构应能承受由重力产生的对它的拉伸力．这些例子是普遍原则——结

构建筑第一原则的一些具体情况．一座建筑及其结构构件要想稳定，该结构每一点处的力的总作用效果必须为零．否则，哪个点上有非零的作用力，哪个点就会移动．结果导致建筑发生移动，进而可能产生崩塌．即使只是最轻微的不平衡，多余的力也会使物体移动．有问题的力除了外力（如重力）外，还有建筑所用材料的内力（如反作用力和挤压力）．这一“只有零移动才能稳定”的原则实际上太过严格．毕竟，许多建筑物即使由于风、热和地震而移动却依然完整无缺．摩天大楼被设计成把风推回去的方式来获得受到控制的运动平衡，以此对抗强风．建筑物会随温度的变化膨胀和收缩却不受到损害．较新的建筑物通常设计成能跟随地震的作用起伏而不倒塌．但是，考虑到本文的重点是刚性砌筑建筑物，以上的这些影响都可以看成次要的，主要用“只有建筑的每一点的总作用力都为零才能稳定”的原则来分析它的建筑结构．垂直向下的重力是主要的力．正是由于这一原因，在分析中，基本策略是将力分解成水平和垂直分量.

最后让我们用一个例子来说明结构建筑第一原则．建筑工地上的一架梯子由水平地面支撑，以60°角斜靠在竖直刚性的墙上．一个工人爬上梯子的顶部．他连同他所携带的物品和梯子的总重量共240磅．图2-24(a)画出了梯子的横截面．我们认为240磅的总重量垂直向下施加在A点上，垂直的墙对梯子的反作用力也作用于A点．假设垂直的墙非常光滑，则墙对梯子的向上的摩擦力可以忽略．这样反作用力H是水平的，整个240磅的垂直负载由底部的B点承受．图2-24(b)画出了B点的3个力．它们是地板向上的反作用力、梯子向下倾斜的推力P、防止梯子滑动所必需的摩擦力F．假设梯子及作用在其上的力是稳定的．根据结构建筑第一原则，作用在B上的3个力达到平衡．因此推力P的垂直分量等于240磅，F的大小与P的水平分量相等．根据图2-24(c)，可知$P\cos30°=240$，$P\cos60°=F$．因为$\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos60°=\frac{1}{2}$，所以有

$$P=240\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{480}{\sqrt{3}}\approx277.1\text{磅},\quad F=\frac{480}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{240}{\sqrt{3}}\approx138.6\text{磅}$$

注意，梯子在B点的斜推力P大于梯子所支撑的240磅的负载．这似乎是不可能的．难道这个斜推力不该只是等于负载对梯子的力沿与斜推力一致的方向上的分量240cos30°吗？事实并不完全是这样，因为还需要考虑墙的反作用力沿梯子向下的分量$H\cos60°$．这两个分量相加则有 $P=$

240cos30°+ H cos60°．据此我们可以计算H，得$\frac{1}{2}H=\frac{480}{\sqrt{3}}-240\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，因此

$$H=\frac{960}{\sqrt{3}}-240\times\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{960}{\sqrt{3}}-\frac{720}{\sqrt{3}}=\frac{240}{\sqrt{3}}$$

因此有H=F．这并不让人吃惊．人们本来就会预料到两个水平力F和H互相平衡．同样可以对A点的力进行分析，P、H和F的结果均一致．

图2-24(b)抽象地表示出地板与梯子的接触点以及作用在该点的力．由于这一点独立于该结构的其他部分，这样的受力图被称为自由体受力图．

水平摩擦力是保持梯子在地面上不滑动所必需的，这一事实说明了一个非常重要的一般规律：除非对倾斜结构部件的推力的水平分量被整体结构所抵消，否则该结构不会稳定．

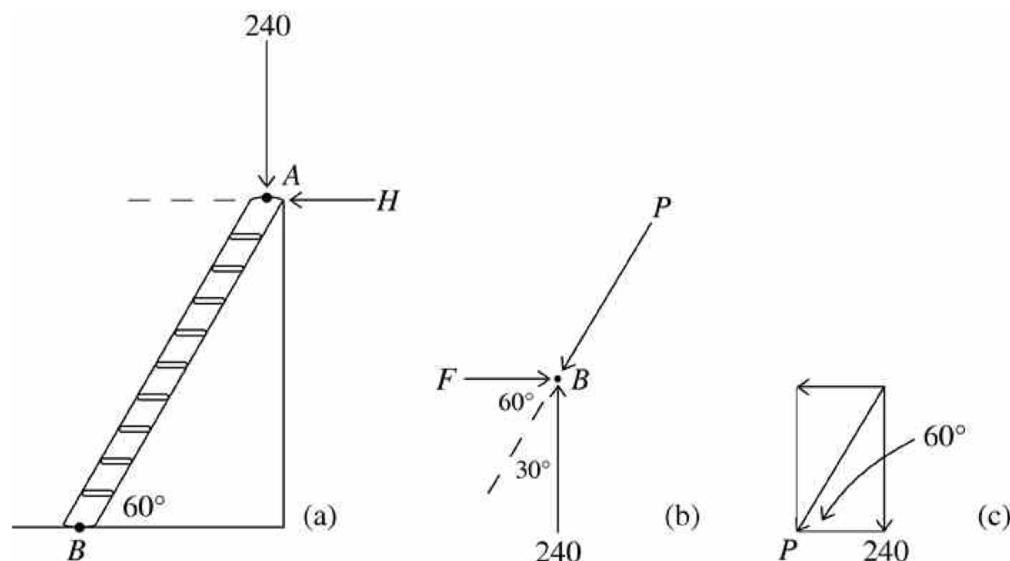


图　**2-24**

2.5　罗马拱

罗马建筑人员主要使用石制拱．图2-25展示了一个华美的范例．其他文明中也使用拱及与它相关的形式，如穹顶和拱顶，但只有在罗马人的手中，它们才成为一种新型建筑的基本元素．通过利用石头抗挤压的特性，拱能横跨大型空间．半圆拱券尤其容易建造，罗马人把它们广泛地用于建设桥梁、高架渠、竞技场、神庙和别墅．



图**2-25**　以弗所（今土耳其）的哈德良神庙的拱，**Evren Kalinbacak** 摄

抽象地考虑一个典型的半圆形拱券．它的形状以及组成拱券的楔形块由两个同心圆的上半部分及一些半径所确定，如图2-26(a)所示．楔形块被称为拱石（voussoir是法语单词，具有拉丁词根volvere，意为“滚动”）．顶部的拱石是拱顶石．位于拱券和支撑柱之间的构件是拱墩．起拱点是指内表面上拱券开始上升的点．起拱线是由起拱点确定的线．通常它是该拱券内部半圆水平方向的直径．这些构件以及拱的跨度如图2-26(b)所示．

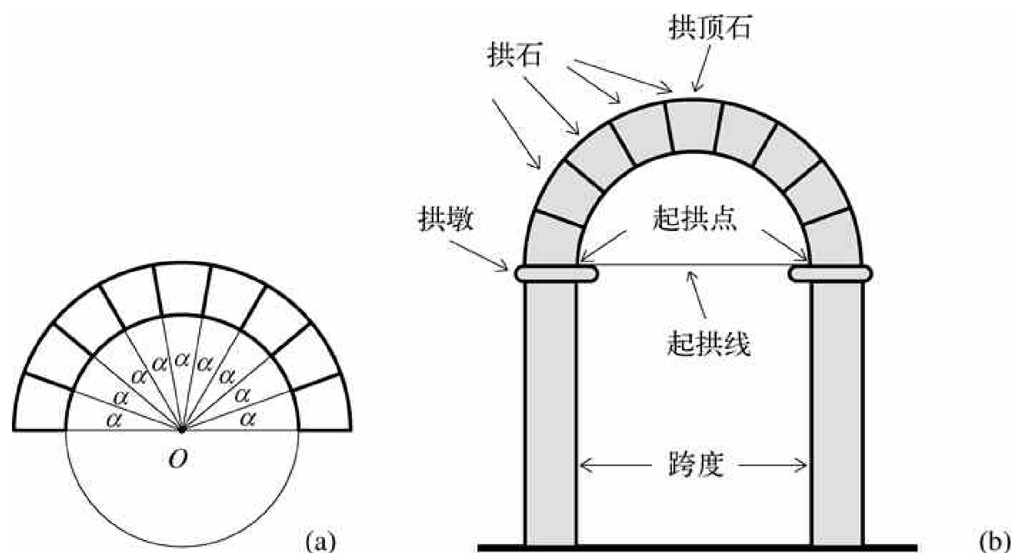


图　**2-26**

图2-27(a)展现了罗马人是如何建造拱券的．在建筑过程中，他们使用被称为拱鹰架的木制结构使拱石保持在正确位置．拱顶石放好后，其他的拱石就不会向内倾斜，它们都被固定在特定位置后，就可以把拱鹰架拿走了．拱石及拱券所支撑结构的重量会产生垂直向下的重力．这些力被弯曲的拱券改变了方向，转移到支撑柱上，从柱子又转到地面上，如图2-27(b)所示．这些力的稳定传送要依靠石头耐挤压的能力．不过要使这些力沿弯曲的拱券向下平稳传送，还需要抑制它们向外的水平分量．只有考虑到这些，拱券才能保持稳定．

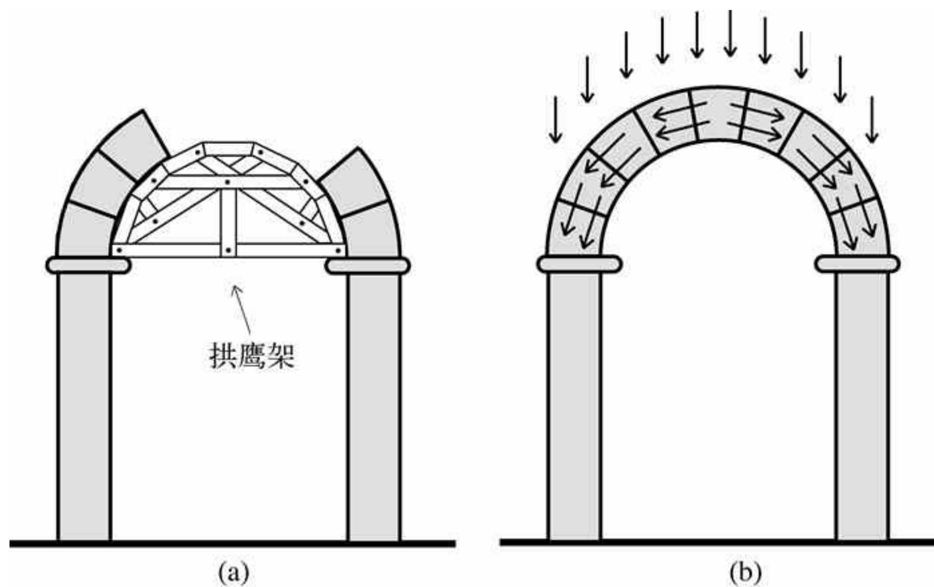


图　**2-27**

现在我们转而研究拱石重量所产生的力，重点研究它们向外的水平分量．假设拱券稳定且它只支撑自身的重量，没有额外的负载．如图2-26(a)所示的情形，我们假设拱石是相同的．所以每块拱石的重量都为W，每块拱石的两条边都有同样大小的角度α．

拱顶石被放在正确位置，两块拱石紧挨在它下面，典型的拱石只由它下面的那一块拱石支撑．位置较低的拱石对位置较高拱石的推力有两个分量，如图2-28(a)所示．两块拱石的分界面上存在与它垂直向上的推力，沿着分界面方向有摩擦力．图2-28(b)画出了这两个力以及它们的合力．这个合力是位置较低的拱石对位置较高拱石的总作用力．在大多数情况下，罗马建筑师在建拱券时不使用灰泥，而依靠拱石精确的形状．因此，我们认为拱石的边非常光滑，这样摩擦力的影响是次要的．接下来的分析将忽略摩擦力，假设位置较低的拱石对位置较高拱石的推力垂直于它们的分界面．我们将单独考虑一块拱石，先从拱顶石开始研究．

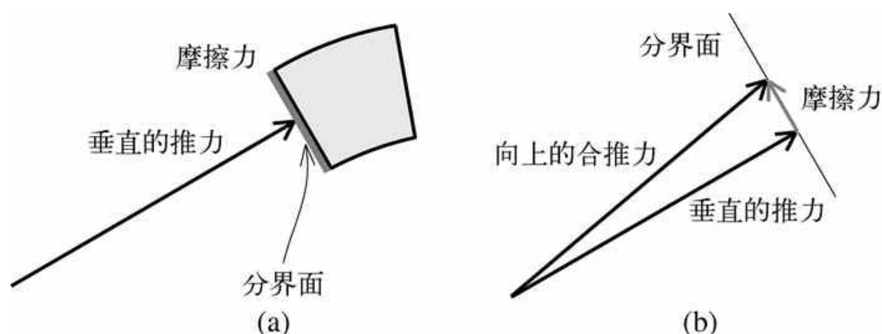


图　**2-28**

由于拱券是对称的，我们可以假设拱顶石的两个推力大小相等，设为P_0．如图2-29所示．因为这两个力的垂直分量一起支撑了拱顶石的重量，则每个垂直分量均等于$\frac{W}{2}$．现在转到图2-30(a)．点C_0是拱顶石的中心（质心）．图2-26(a)给出了O点的位置和位于O点的角$\frac{\alpha}{2}$．选择A点，使线段AC_0与向上的推力在一条线上．取B点，使AB水平，从而垂直于C_0O．注意两个直角三角形的斜边分别为OC_0和AC_0，它们有公共角

C_0．因为任意三角形的内角和均等于180°，则有$\angle C_0AB=\frac{\alpha}{2}$．设$H_0$为$P_0$的水平分量．图2-30(b)中的两个角相等，推力$P_0$的垂直分量为$\frac{W}{2}$，则可以得到如图2-30(c)所示的受力分析图．将力分解成分量，得$H_0=P_0\cos\frac{\alpha}{2}$，$\frac{W}{2}=P_0\sin\frac{\alpha}{2}$．因此$P_0=\frac{W}{2}\times\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$，且有

$$H_0=\left(\frac{W}{2}\times\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{W}{2}\times\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

这是使拱顶石保持在合适位置的力的水平分量．

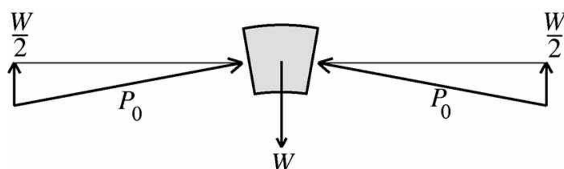


图　**2-29**

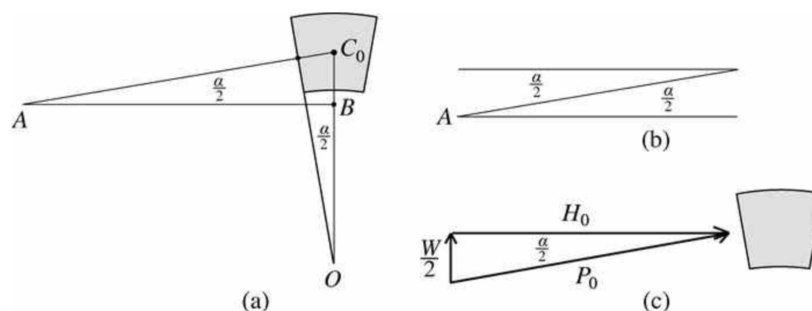


图　**2-30**

分析完拱顶石，我们可以将其从拱券中移除，转而分析紧挨在它下面的那块拱石所承受的力。图2-31考虑了拱顶石左边的那块拱石．设P_1是支撑并只支撑这块拱石的推力的大小，令H_1为其水平分量．P_1的垂直分量等于拱石的重量W．在图2-31(a)中，C_1为拱石的中心，选择A点，使AO

水平且AC_1与推力在一条线上．AC_1垂直于拱石的边，则A点的角为$\frac{3\alpha}{2}$．图2-31(b)中的两个角相等，则可以得到如图2-31(c)所示的受力分析图．将力分解成分量，得$H_1 = P_1 \cos\frac{3\alpha}{2}$，$W = P_1 \sin\frac{3\alpha}{2}$．因此$P_1 = W \times \frac{1}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$，且有

$$H_1 = \left(W \times \frac{1}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\right)\cos\frac{3\alpha}{2} = W \times \frac{1}{\tan\frac{3\alpha}{2}}$$

这是P_1的水平分量，它使该拱石保持在拱顶石的左侧．

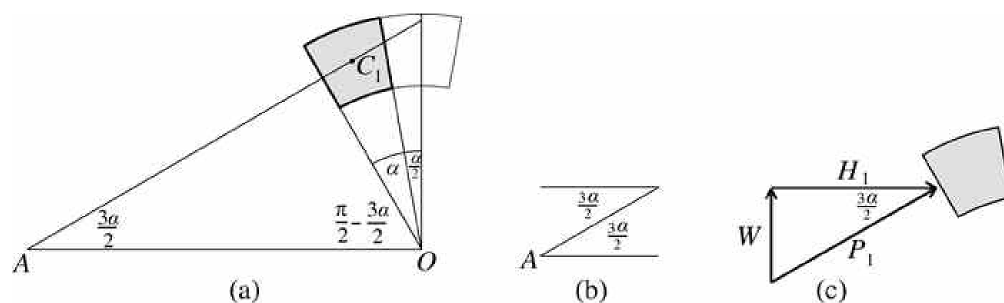


图　**2-31**

用与图2-31类似的方法可知，负载拱顶石下方第二对拱石所需要的力的水平分量是$H_2 = W \times \frac{1}{\tan\frac{5\alpha}{2}}$．对第三对拱石，这一水平力为$H_3 = W \times \frac{1}{\tan\frac{7\alpha}{2}}$．你看出这些式子中 H_1、 H_2、 H_3 所遵循的模式了吗？这种模式在后续的拱石对中会一直持续下去．（$H_2 = W \times \frac{1}{\tan\frac{5\alpha}{2}}$的讨论参见问题31．）

举个例子，假设W = 30 磅且 α = 20°．因为 9×20°= 180°，所以该拱有9块拱石．将W和α的值代入到前面得到的公式中（对计算结果四舍五入之后），得H_0 = 851 磅、 H_1 = 520 磅、 H_2 = 252 磅、 H_3 = 109 磅．则这些拱石在每一方向上产生的水平力共为851+520+252+109=1732磅．

这是相当大的力，尤其考虑到这9块拱石的总重量是 9×300 = 2700 磅．当然，如果拱还需要支撑负载，产生的水平力会更大．

支撑拱石所需的力的水平分量如图2-32所示．因为拱券是稳定的，这些力需要由拱券所在的整体结构来提供．也可以从结构建筑第一原则的角度进行分析．该原则告诉我们稳定拱券的拱石对结构产生推力，其大小与上述力相同，方向相反，这些向外的力需要由结构整体来承担．这种向外的力被称为侧推力．图2-25的拱中，最底部拱石的水平延伸部分向里推，这一推力被逐块向上传送到拱石上，用来抵消水平侧推力．

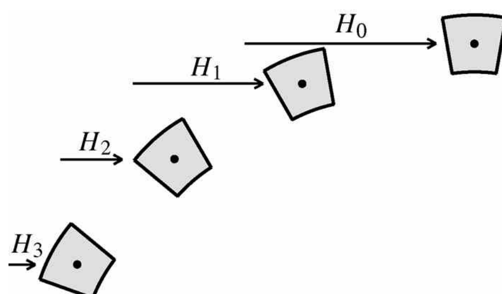


图　**2-32**

上文对拱所做的分析，考虑的是单块拱石．它研究了支撑单独一块拱石的斜向上的推力及其水平分量．图2-32总结了这些研究结果．由于结构对称，同样的结论也适用于拱的另一侧的拱石．但拱券内部的实际情况并不如此．相对的每两块拱石支撑着位于两者之间的拱券的所有部分，而不是仅支撑其上方紧挨着的那对拱石．拱石非常光滑的假设限制了它们表面摩擦力的影响．而在拱券的动力学中，摩擦力实际起到一定作用．考虑一个界面，可以注意到摩擦力向上推上面的拱石，向下推下面的拱石．尽管我们分析时所做的简化假设意味着得到的结论只是一个近似，但这种分析还是抓住了拱的基本性质．重要的是一定要记住，不论要对复杂结构（无论多复杂）做任何定量分析，首先必须做假设简化，因而只能得到估计的结果．为了使这些估计有用，做假设简化时，必须要抓住结构的主要特征．有趣的是，在分析半圆拱时可以注意到，实际的水平侧推力比忽略摩擦力后所得到的结果小．因此，用这种分析方法计算得到的水平侧推力并来设计拱形结构时，需要给出安全裕度（或系数）．（见问题32．）

维特鲁威的书是罗马建筑实践的全面记录．对当前的讨论，他的评论是：

> “当用到拱……最靠外的墩柱必须建得比其他厚，这样当楔形石在墙的负载的压力下开始……向外推拱座时，它们可以有一定的强度来抵抗．”

这段评论使人们确信罗马建筑师知道他们的建筑需要处理拱（还有拱顶和穹顶结构）产生的侧推力．但是罗马建筑师和工程师不可能定量分析力．力能分解成分量并可以用三角学进行估计的想法超出了他们的知识范围．他们只能靠经验，在建造时反复试验，纠正以前出现的错误和误差．

利用石头、砖和混凝土，罗马人建造了管道系统，将附近山中的泉水引入到他们的城市，得到新鲜的水．水只靠重力流动，不用水泵．这就要求管道从高处的泉眼向城市终点的水库逐渐向下倾斜．沿途遇山要挖隧道，遇谷需架桥梁．高架渠正是实现这些要求的建筑．它包括一排排叠成几层的被称为拱廊的半圆形拱．法国南部横跨在加德河上的罗马高架渠建于公元前20年到公元前16年，让人印象深刻，如图2-33所示．最高的那层半圆拱券让输送水流的管道通过．它位于山谷上方，高49米，长269米，拱券的跨度为6.1米．下面两层的拱券除了中间的跨度为24米外，其余都是18米．为了能支撑桥面，最底层的一排拱做得要更厚一些．这么厚的拱形结构称为拱顶，或更精确地称为筒拱顶．图2-34展示了拱廊中两拱所夹的三角形区域内填充的抗挤压砌筑材料是如何平衡拱的水平侧推力的．



图**2-33**　法国南部的罗马加德高架渠，**Hedwig**摄

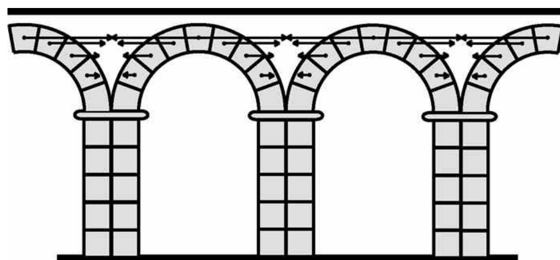


图　**2-34**

罗马人的另一项重要革新是混凝土的使用．他们发现在石灰、沙子、碎石和砌筑材料里混入某种火山灰，再加上水后，就能得到一种混合物，该物质变硬后的密度与石头相似．该混合物在变硬前，可以改变形状，进行浇筑．维特鲁威把火山灰描述成“一种自然存在的灰，用这种天然

粉末，靠自然的力量就能产生让人吃惊的结果”．他的论文讨论了罗马混凝土的合成及应用．罗马人认识到混凝土的强度并将其用在他们的许多建筑物中．因为涂抹混凝土的建筑并不美观，罗马人开始熟练地使用砖、灰泥、大理石和马赛克对建筑进行装饰．罗马混凝土的密度很大，它被人们手工分层涂抹在大块石头和砌筑碎片周围．它的抗挤压强度大，但抗拉伸强度小．罗马混凝土并不比传统的石头和砖等建筑材料更具有结构上的优势，它的广泛应用只是出于施工和经济上的考虑．相对而言，用它施工更为容易，也相对便宜．现代混凝土与罗马混凝土有一个重要的不同点．虽然罗马混凝土的密度大，但现代混凝土是流体的且成分均匀，不仅能被浇筑成形，还能浇筑到钢筋网中，大大提高它的强度，尤其是抗拉伸强度．

2.6　罗马竞技场

罗马人广泛使用拱廊结构．希腊人在半山坡上凿出大剧院，用山体支撑倾斜排列的半圆形座位（如图2-3所示），而罗马人则不是这样，他们在城中的平地上修建剧场和竞技场．这需要有大量的混凝土、砌筑材料和石头作为基础．罗马人使用拱券和筒拱顶来支撑座位区，建立观众入口．罗马剧院和竞技场四周带拱廊的外墙实际上是半圆形或椭圆形分布的沟渠．罗马的马赛卢斯剧院建于公元前13年至公元前11年，正是符合以上描述的一个范例．它的平面图如图2-35所示．其座位区约能容纳11 000人．环绕的半圆形拱廊半径约为61米．图2-36展现了该建筑的残余部分．

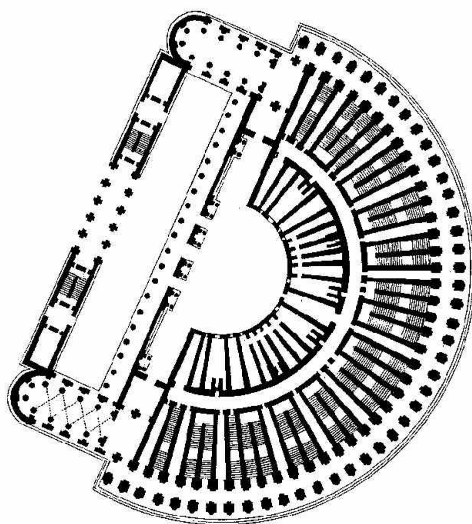


图**2-35**　罗马马赛卢斯剧院平面图



图**2-36**　罗马马赛卢斯剧院残余的墙壁结构，**Joris van Rooden**摄

几十年之后，罗马人雄心勃勃地开展了一项大型项目．它的设计从一个像图2-33所示的高架渠开始，但它的长度更长，且围成椭圆形，两端相接．在这个椭圆拱形结构的内部，还有一个同样的结构，与它平行但比它矮．再向里还有第三个更矮的结构，依此类推，最后有个最矮的椭圆围出了活动区域．这些带拱廊的椭圆结构由一些拱券和筒拱顶连接，它们沿椭圆结构及从外到内的椭圆半径方向分布．这一设计是罗马竞技场的核心，也是它的精华所在．筒拱顶作为观众的入场通道，也是倾斜座位区的支撑．图2-37和图2-38展示了如今罗马竞技场残留的遗迹．图2-37展现了一个外部和两个内部的椭圆结构．注意外部椭圆结构光滑的外表面依旧完好无损．内椭圆结构表面有损坏，可以看到它建造时所用的坚硬的混凝土．



图**2-37**　罗马竞技场，**Marcok**摄

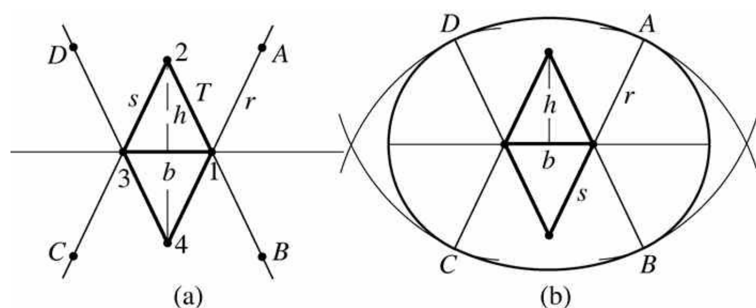


图**2-38**　鸟瞰竞技场，选自**Michael Raeburn**的《西方世界的建筑》（***Architecture of the Western World***），纽约，**Rizzoli**出版社，**1980**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术建筑藏书室，**Barr Farre**收藏

罗马人究竟是如何构造出竞技场一系列平行的椭圆结构的？这在学术上一直是个存在争议的问题．他们很有可能是通过逐个连接圆弧得到的．人们已经知道，早期的一些小型罗马圆形剧场的椭圆形结构是用圆弧构造的，方案如下．在一片平坦、水平的地面上，画出一个等腰三角形T，如图2-39(a)所示．三角形底边长度为b，高为h．顶点记做1、2、3，从1到2与从3到2的边的长度都等于s．紧挨着它再画一个与它全等的三角形，使顶点1、2、3、4构成一个菱形．像图中那样延长菱形的4条边，延长线的长度为r．在1、2、3、4处钉上钉子．在点1处的钉子上系上一根绳子，标出它到A点的长度r，从A到B画一条圆弧．接下来在钉子2处系一条绳子，将它拉到B点，从B到C画一条圆弧．接着在钉子3和4处同样画出从C到D和从D到A的圆弧．这4条圆弧连接起来就形成如图2-39(b)所示的椭圆．该椭圆在点A、B、C、D处从一个圆弧到另一个圆弧的过渡非常平滑．事实上，圆上的任意一点P处的切线均垂直于从圆心到P点的半径（如图2-40(a)所示）．将这个事实用在点A和从1到A点的半径以及从4到A点的半径上，如图2-41(b)所示，可得过A点的两圆弧的两条切线重合．因此在A点的过滤是平滑的．出于同样的原因，B、C、D点处的过滤也是平滑的．图2-41(a)给出了一个椭圆以及它的长短轴．图2-41(b)中的另外两个椭圆可以通过上述的方法重复构造，其中三角形仍为T，而长度r却各不相同．从同一三角形T得到的椭圆互相平行，但形状不同．如果r比三角形底边要长，则椭圆接近于圆．如果r相对较短，则椭圆扁平．通过改变等腰三角形的形状，罗马人可以构造出无数个不同形状的椭圆．

根据2-39(b)，椭圆的长轴长b+2 r，从椭圆中心到圆弧DA顶部的距离

为$s+r-h$．则短轴的长度为$2s-2h+2r$．根据毕达哥拉斯定理，$s^2=h^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$，因此$h=\sqrt{s^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4s^2-b^2}$．因此，短轴长为$2s-\sqrt{4s^2-b^2}+2r$．



.

图**2-39**　罗马人构造椭圆的方法

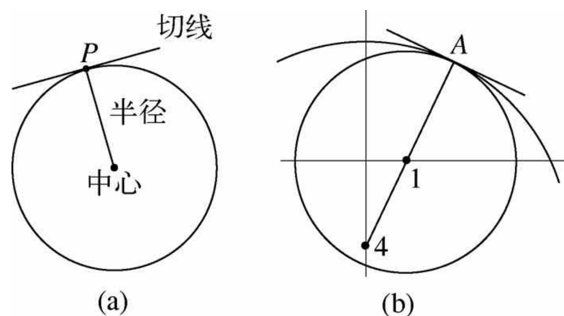


图**2-40**　平滑的过渡

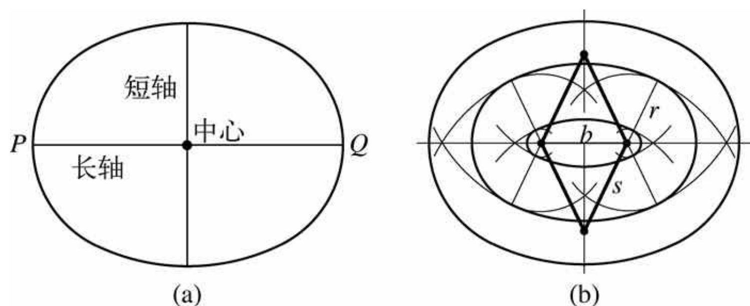


图**2-41**　罗马椭圆

罗马建筑人员是用上述方法构造竞技场外部椭圆的吗？有可能．已知竞技场外部椭圆的长短轴长度约为615英尺和510英尺．取$s=b$（则T为等边

三角形），用以上得到的长短轴公式，可得

$$b+2r=165,\ 2b-\sqrt{4b^2-b^2}+2r=(2-\sqrt{3})b+2r=510$$

解b和r，得b=143英尺，r=236英尺．则当s=b=143英尺，r=236英尺时所获得的椭圆，其长短轴具有需要的长度．（问题35将进一步探讨该问题．）

竞技场于公元80年完工，是最大的古代罗马遗迹．据估计，它的座位区能容纳 50 000到80 000人，这里是罗马皇帝用血腥场面娱乐大众的竞技场．观众们此处观赏角斗士搏斗到死，基督徒被狮子和老虎吞掉．这些“游戏”在公元400年中断之后，竞技场遭到漠视、故意破坏和地震的损害．在从文艺复兴开始的罗马复兴期间，它成为这座永恒之城里新建筑的采石场． 18世纪中期，罗马教皇宣称竞技场是纪念基督徒在此殉难的神圣纪念碑，停止了对它的拆除．

2.7 万神殿

罗马古迹中最让人印象深刻的是万神殿（不要与雅典卫城的帕提农神庙混淆）．它的总建筑师是罗马皇帝哈德良．它建于公元118~128年，用于祭祀罗马所有的神（希腊语中，pan意为“所有”，theon意为“神的”）．它的立面图（指对建筑立面的表示形式）如图2-42所示．万神殿的门厅是一座希腊科林斯风格的门廊，该门廊位于一座顶部被半球形穹顶所覆盖的大型圆柱形结构的正面．万神殿的穹顶被认为是传达美和力量的理想完美形状．彩图5展现了它壮观的内部．万神殿的圆形地板的直径为 43米，穹顶的最高点离地约为43米．为了采光和透气，它的顶部有一个圆形的开口，即圆孔（拉丁语中，oculus表示“眼睛”），直径约为7.3米．除了入口，圆孔是内部唯一的自然采光源．注意天花板上排成圆形的一些凹进去的矩形，即镶板．与希腊人更重视外部空间和形式不同，罗马人更注意内部细节，他们在内部的框架里放上雕像，大量使用有凹槽的科林斯柱和壁柱（指每两根柱子旁边的矩形垂直部件）．在建造万神殿的大型穹顶之前，罗马人需要对穹顶面临的结构难题有一定认识并且能够将其 解决．

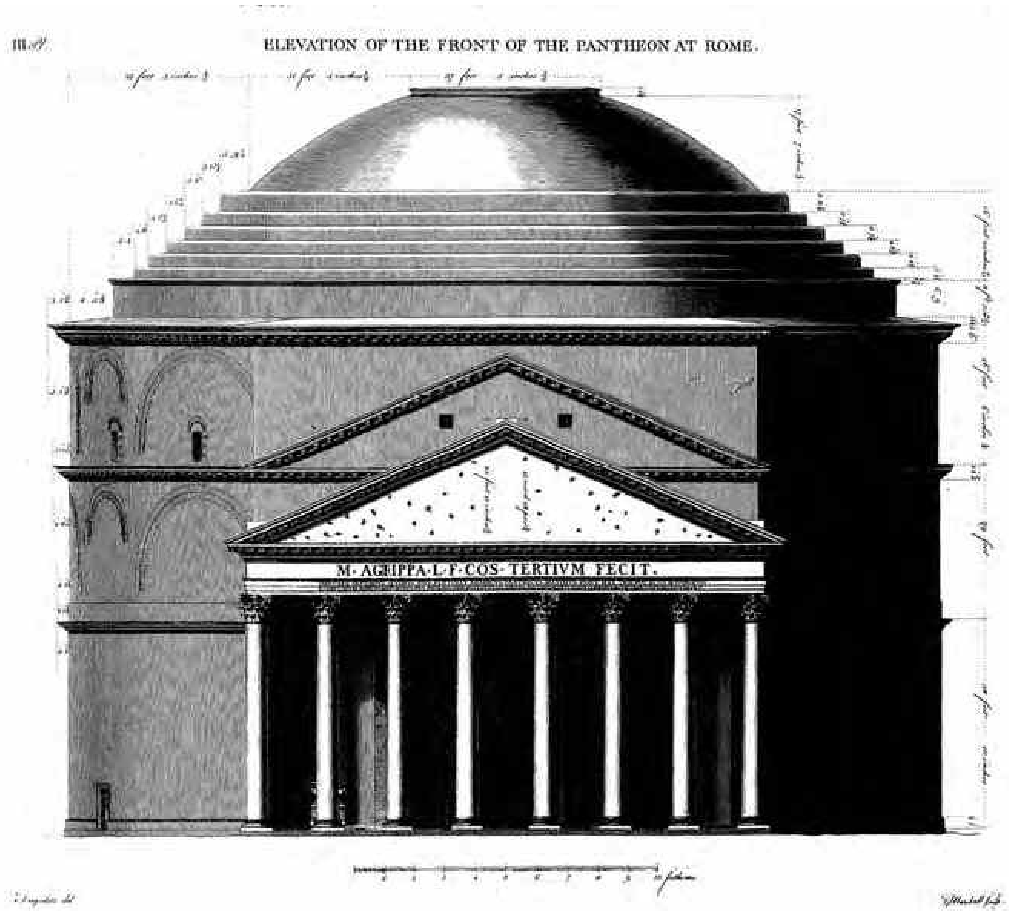


图**2-42**　**Antoine Desgodetz**，雕版万神殿立面图．选自《古罗马的建筑》（***Les edifices antiques de Rome***），巴黎，**Claude-Antoine Jambert** 出版社，**1779**



彩图 **5**　乔万尼·保罗·潘尼尼（意大利，1691—1765），《罗马万神殿内部》（*Interior of the Pantheon, Rome*），约 1747 年．帆布油画，127 厘米×97.8 厘米．克利夫兰艺术博物馆．购买于 J. H. Wade Fund 1974.39

穹顶的壳是它的结构部分．一般而言，穹顶壳是砌筑或用混凝土建造的．图2-43展示了如何通过经中心轴垂直切割穹顶把壳看成拱的组合．就像之前研究的那样，这些拱产生向外的水平力．因为随着高度的增加，壳的这些拱越来越细，它们的重量也越来越轻，因此水平力也比以前小．但是，与图2-33和图2-34中的高架渠不同，这里只有穹顶底部和壳的内部阻力来抑制它们．穹顶过其垂直中心轴的垂直切面称为子午

线，水平圆形切面则称为环，如图2-44所示．环是壳的环形水平切面．环上作用有两个力，一个是穹顶底部沿刚性壳向上传递的推力，另一个是环上方穹顶向下的重力．靠近顶部时，重力已不重要，从下传递的该结构的推力占主要地位．这就使环受到挤压，正如拱的拱顶石受到挤压一样．而在非常靠下的地方，环上方壳的重量超过了下方传递的向上的推力．这一多出来的力产生向外推的水平分量，使环（只有从底部到壳约$\frac{2}{3}$部分的环）受到拉伸，如图2-44所示．这种拉伸力被称为环向应力．结构建筑第一原则告诉我们，除非壳能耐拉伸，否则穹顶壳将环向扩大，某些子午线上会产生裂缝（极端情况下能造成结构破坏）．

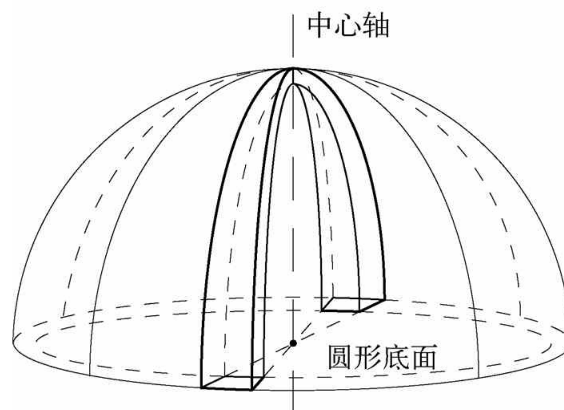


图**2-43**　穹顶的壳是拱的组合

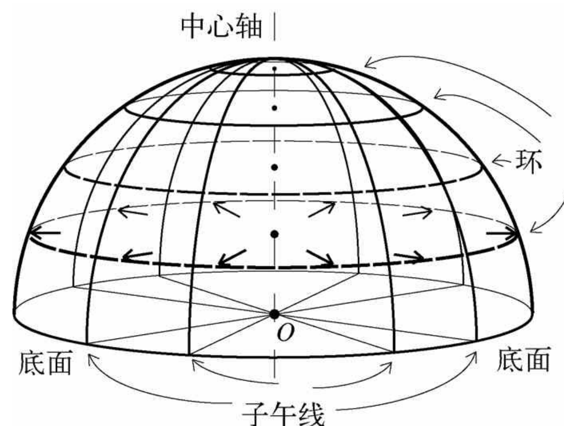


图**2-44**　穹顶壳上的环向应力

罗马人用混凝土建造万神殿．混凝土是一种相对容易使用的建筑材料，但就像砖或石头一样，它的抗拉强度小．因此虽然它使万神殿的建造变

得容易，但相对而言，它在限制穹顶壳的环向应力方面性能较差．不过只要在混合时增加轻的或重的骨料，即石头或砌筑材料，混凝土就能变得较轻或者较重一些．罗马人利用了这个优势，将混合重量轻的火山岩浮石制成的混凝土作为穹顶上部，减轻了穹顶的重量，从而减小了环向应力．穹顶壳上大部分的混凝土每立方米约重1.3吨，而承重圆柱形墙上方的壳的重量约为每立方米1.6吨．顶部的圆孔不仅能透光透气，还进一步减轻了穹顶的重量．（7.2节用基础微积分估算穹顶的重量．）为了限制穹顶底部向外的侧推力，罗马人使承重圆柱形墙的厚度达6.1米，所用混凝土的重量从墙顶部的每立方米1.6吨增加到底部的每立方米1.8吨．圆柱形墙里的混凝土骨料含有密集、有弹性的玄武岩火山石．刚性混凝土壳将推力从底部向上传递．与桶箍把木板绑在一起的方法类似，这个推力向内的分量抵消了环上的拉伸应力．万神殿的圆柱形墙建在坚实的地基上．地基所用的混凝土也含有玄武石，每立方米2.2吨（接近于现代标准混凝土每立方米2.4吨的重量）．

彩图5展示的壳内侧的镶板凹进去的不深，并没有结构上的用途，对穹顶的重量没有本质上的影响．但是镶板所需要的水平和垂直棱线的配置确实与在后期穹顶和拱顶中起到重要结构作用的拱肋部件相似．罗马人经常将砌筑材料和混凝土块用在拱券和穹顶外侧位置较低的部分，目的是增加这些结构的稳定性．他们将环形台阶建到万神殿穹顶靠下的部分（见图2-42和图2-45），有可能是想实现以上功能，并限制环向应力．但是最近的研究表明，环形台阶在这一点上似乎没起什么重要作用．修建环形台阶也可能是为了方便人们在外壳上从事建筑工作．穹顶建造时使用了拱鹰架，许多精心搭建的木材从万神殿的地面上竖起，用来支撑不断增加的壳，直到建设完成，浇筑上混凝土．

图2-45绘出了万神殿中心垂直截面图的一半．它展现了壳的结构、圆柱形承重墙的截面、圆孔以及环形台阶．沿壳向下的向量代表穹顶的重量向下传递．它们的水平分量产生了前面已讨论过的环向应力．箭头向上的向量代表壳从其圆柱形底部所获得的支撑．它们的水平向量抵消了环向应力．加粗的弧位于一个半径为$\frac{1}{2}\times 142=71$英尺（21.6米）的圆上．它的圆心C是拱鹰架上的一点，在建造过程中，万神殿的施工人员从这点开始向上面各个方向拉长绳子，确保球形壳的形状．

尽管人们作出各种努力来控制万神殿穹顶的环向应力，但它还是在穹顶的一些子午线上产生了大量的裂缝．裂缝的分布通常与圆柱形墙上部的

开口（图2-42和图2-45展示了其中的一些）相对应．这些开口增加了它们周围壳的环向应力．不过万神殿已屹立了近1900年，这一事实告诉我们罗马人是多么成功．万神殿是建筑历史上最重要的建筑物之一．罗马设计和建筑实践影响深远，很难想象如今的建筑物如果不使用拱券、穹顶和混凝土会怎样．

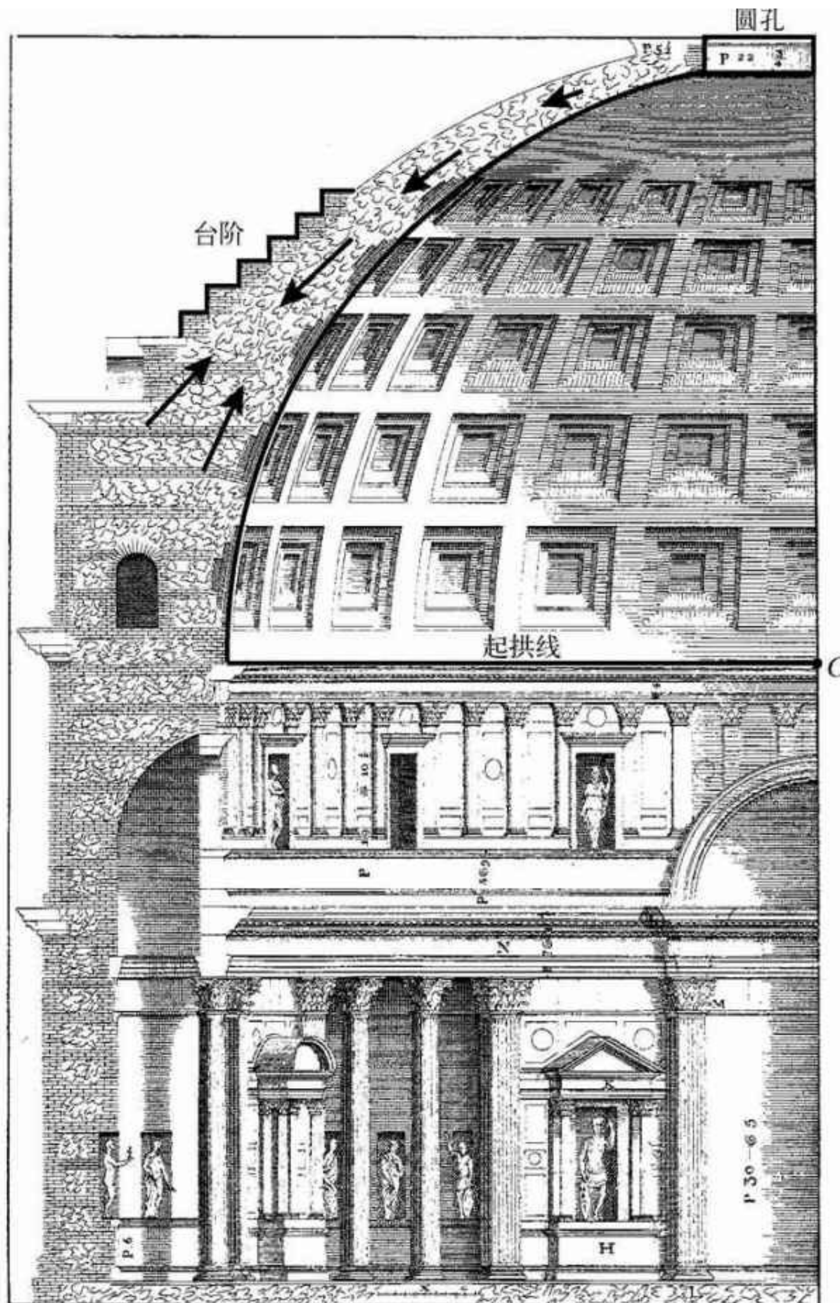


图**2-45**　万神殿截面图，选自安德里亚·帕拉迪奥的《建筑四书》（***I Quattro Libri dell'Architettura***），威尼斯，**1570**．普林斯顿大学图书

馆，马昆德艺术考古藏书室

2.8 问题和讨论

第一组问题研究能在欧几里得的《几何原本》中找到的基础希腊几何学．之后的一组考虑三角学的问题，再接下来的一组研究力，余下的大多数问题考虑拱．一些问题的求解依靠之前问题的结论．最后用3个讨论结束本节，它们均与本章讨论过的题目密切相关．

问题**1**　用图2-46证明三角形的内角和为180°．

接下来的两个问题要使用全等三角形．如果把一个三角形移动到另一个三角形的上面，二者能够完成重合，则这两个三角形是全等的．图2-47的两个三角形是全等的．图左边的这个三角形应该怎样移动才能使它与右边的完全重合？

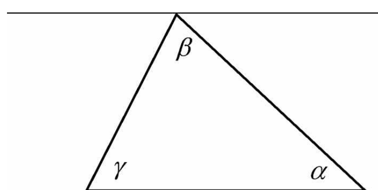


图　**2-46**

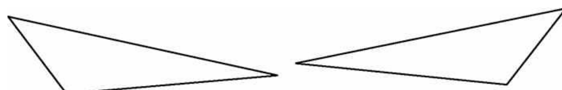


图　**2-47**

问题**2**　给定一个等腰三角形*ABC*，底边为*AB*，边*AC*和*BC*相等．证明∠*A*和∠*B*相等．【提示：将图2-48(a)中的三角形的侧边延长，使得*CD*=*CE*，如图2-48(b)所示，可以证明三角形*CAE*与*CBD*全等．推出三角形*ABD*与*BAE*全等．】

问题2是欧几里得《几何原本》第一卷的第五个命题．它被称为pons asinorum，这是拉丁语“笨人之桥”的意思．对这个名字有两种解释，比较简单一种的解释是证明时用的图（图2-48(b)）像是一座桥．更通用的解释是《几何原本》第一卷的第五个命题是对读者智力的首次真正测试，它被看成是通向下面更难命题的一座桥．不管它的来源是什么，pons asinorum用来指对能力或理解力的关键测试，以区分反应敏捷的头

脑与迟钝的头脑.

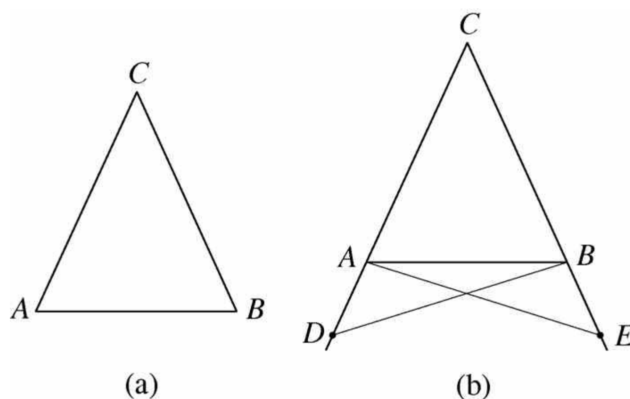


图　**2-48**

问题**3**　证明图2-4(b)中的 $\angle AOE = \angle BOE$. 【提示：两次使用问题2的结论. 】

问题**4**　在一个圆内作它的内接三角形，使三角形的一条边是该圆的直径. 利用图2-49证明该三角形为直角三角形.

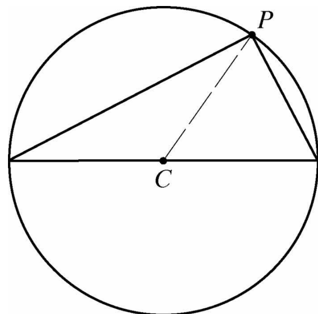


图　**2-49**

问题**5**　令R为任意一个矩形，a和b是它的边长，且有$a \geq b$.

i. 在R的长边上添加一个正方形，形成一个新的矩形R_1. 问R_1的边长是多少？证明如果R为黄金矩形，则R_1也是.

ii. 在R的内部作一个正方形，使正方形的一条边与矩形的一条短边重合. 设R_2为原矩形被正方形切除后余下的部分. 则矩形R_2的边长是多少？证明如果R为黄金矩形，则R_2也是.

【提示：利用黄金分割率φ满足$\varphi^{-1} = \varphi - 1$的事实．】

参考图2-12中的帕提农神庙图像，分析包围它的黄金矩形．注意通过多次使用问题5的步骤（ii）可以得到图中的其他黄金矩形．

以下的几个问题是欧几里得的尺规作图练习．

问题**6**　已知直线L和不在直线上的一点P．过P点作一条L的平行线．【提示：首先过P点作一条L的垂线．】

问题**7**　给定长度单位及长度为1的线段．实现下面（i）和（ii）的构造．解释如何完成（iii）和（iv）的构造．

i. 构造长度为3的线段．取任一线段，将其三等分．【提示：用与图2-7相似的方法构造．】

ii. 构造一条长度为$\frac{5}{3}$线段．

iii. 设n为任意正整数，如何构造长为n的线段？如何将一条线段分成n等份？

iv. 设$\frac{n}{m}$为正有理数，如何构造一条长度为$\frac{n}{m}$的线段？

问题**8**　给定长度单位，长度为1的线段及正整数n．构造长度为n+1的线段，并以该线段为直径作一个圆．如图2-50那样作一条该直径的垂线，设其长度为y．3次使用毕达哥拉斯定理来证明$y = \sqrt{n}$．这样对任意n，都能构造长为$\sqrt{n}$的线段．【提示：使用问题4的结论．】

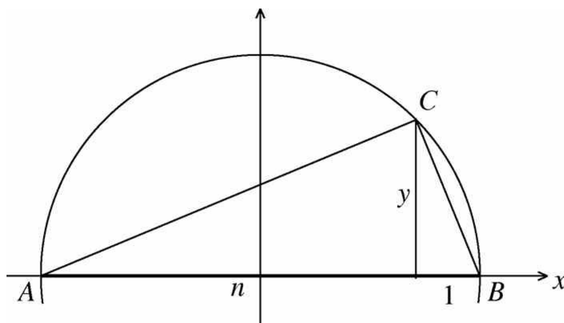


图　**2-50**

将一个角搬移到另一处是非常有用的构造．图2-51展现了如何用尺规将角α从A处搬移到D处．

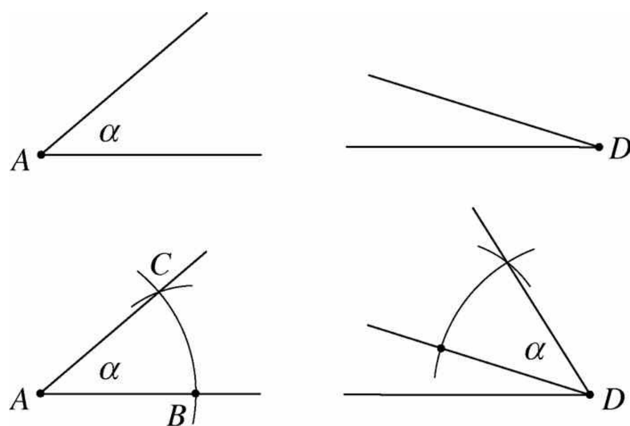


图　**2-51**

问题**9**　给定图2-52中的角α和β，构造 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha-\beta$.

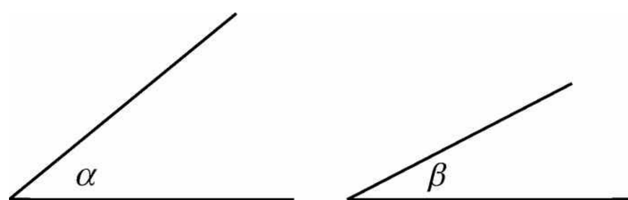


图　**2-52**

问题**10**　用尺规构造15°角．

问题**11**　构造36°、18°、54°、24°角．

问题**12**　描述如何用问题10和问题11的知识构造正十边形、正十五边形、正二十边形和正二十四边形．

克罗迪斯·托勒密的综合性论述《天文学大成》（*The Almagest*）中提出了希腊三角学．希腊三角学在形式和认识上都与现代版本不同，但它们是等价的．问题13到16考虑了基础三角学．

问题**13**　回顾图2-10，设正方形的边长为1．图2-53绘出了其中的三角

形ABC．证明该三角形的底边等于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，高$h=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$．验证$\sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\approx 0.31$，$\sin 72^\circ=\cos 18^\circ=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\approx 0.95$．

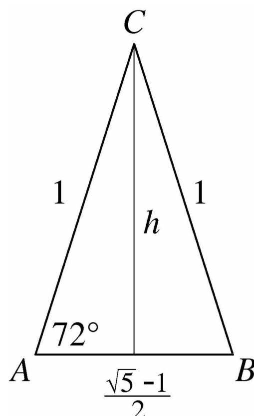


图　**2-53**

问题**14**　考虑任意三角形的角是α、β和γ，与它们相对的边的长度分别为a、b和c．证明正弦定理，即

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

【提示：设α和β为三角形中小于90°的两个角．用图2-54(b)证明图2-54(a)中$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$．可以得到如果所有的角都小于90°，正弦定理成立．如果其中一个角等于或大于90°，设这个角为γ，考虑图2-54(c)．用图2-54(d)证明$\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{\sin\alpha}{a}$．】

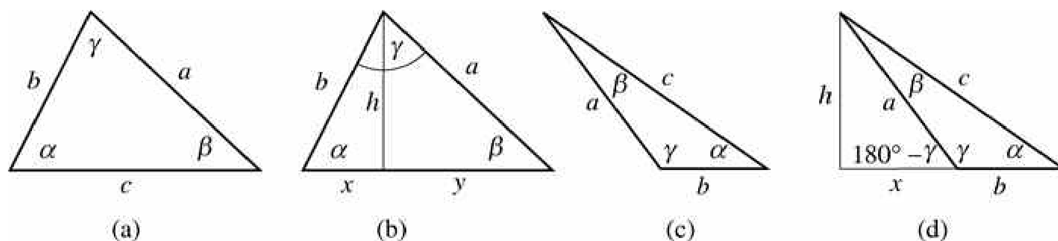


图　**2-54**

问题**15**　考虑任意三角形的任意一个角γ．设γ所对的边长度为c，另外两条边的长度为a和b．证明余弦定理，即

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

【提示：如果 $\gamma \leq 90°$，用与图2-54(b)类似的图，使用两次毕达哥拉斯定理即可．如果 $\gamma > 90°$，用图2-54(d)再使用两次毕达哥拉斯定理．】

三角形T和T'的角互相吻合时，这两个三角形相似．或者说，当这两个三角形的角对应相等时，这两个三角形相似．在图2-55中，因为两个三角形的角α和α'，β和β'及γ和γ'对应相等，这两个三角形相似．（为什么只要两对角对应相等 即可？）

问题**16**　所有的几何学中都提到一个最重要、最有用的事实，即两个相似三角 形对应边（位于对应角对面的边是对应边）的比相等．图2-55中，对应边是 $a \to a'$， $b \to b'$， $c \to c'$．则有

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

用正弦定理证明相似三角形的这一性质．

剩下的问题研究力、梯子、拱、椭圆以及尺规作图．

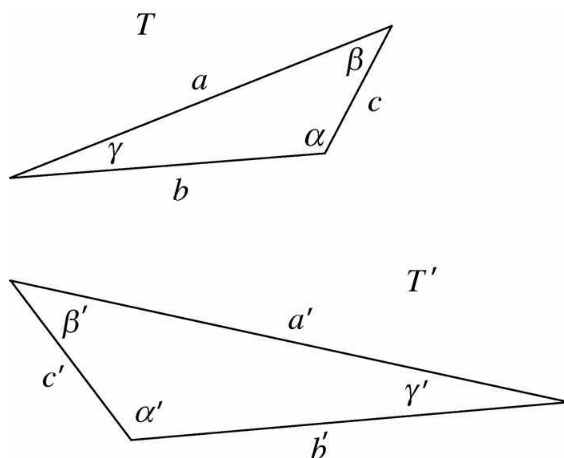


图　**2-55**

问题**17**　金字塔中石灰石的重量对它们下面的石块产生相当大的压力．考虑有 10块石灰石，每块重约12吨．

i. 将这些石块竖直堆放，估计它们对底层石块的压力．

ii. 将这些石块堆成三角形．底层一排水平放置4块，在这排上面对称地放置3块，在它上面放置2块，作为第三排，最后在第三排上放最后1块．估计底层4块石头中每一块所承受的压力．【提示：假设所有的石块均被垂直切割．做了这个假设后，有没有使结果偏离真实情况？】

问题**18**　图2-56用简笔画绘出了一个人体．这幅画左右对称，人物完全静止地站着．单独取出画内5点中的每一点，作出受力分析图．说明每一点处的受力情况．

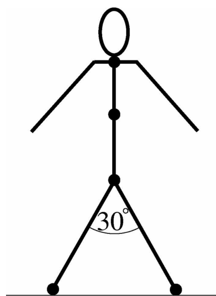


图　**2-56**

问题**19**　图2-57中的向量代表力的方向和大小．用向量画出每种情况下力的水平和垂直分量并计算它们的大小．

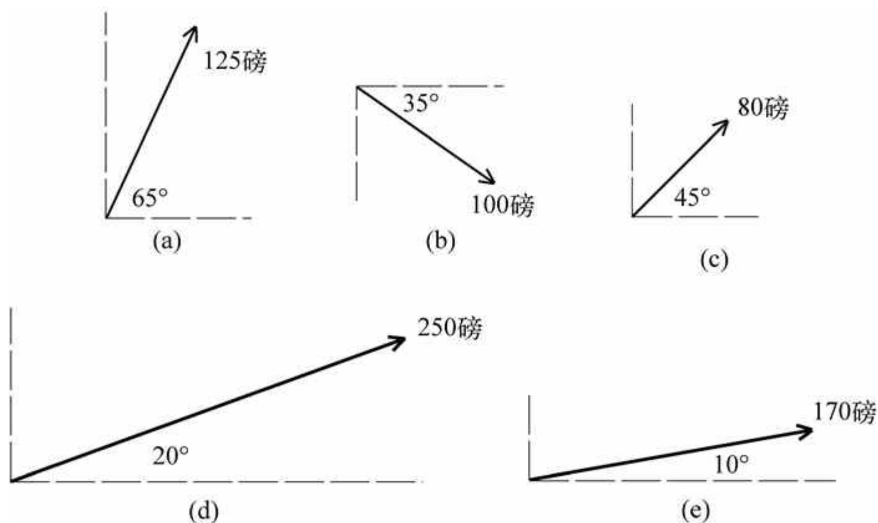


图　2-57

问题**20**　图2-58中的每个图都代表两个力及它们的合力．辨别出每种情况中的合力．图中给出了一些力的大小（以及某两个力间的夹角）．用正弦定理或余弦定理计算没有给出的力的大小．

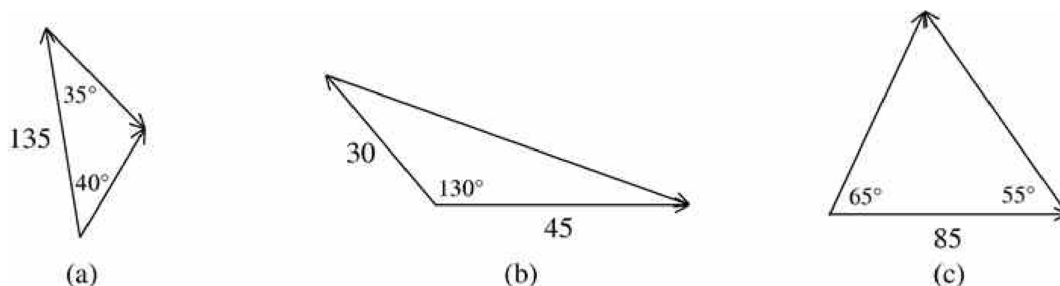


图　2-58

问题**21**　参考图2-59．向量A代表作用在某物体上的重力．向量B和C是对A进行分解后得到的分量．向量D是B的水平分量．图2-59说明向下的力A具有非零的水平分量（即D）．但由于原来A的作用方向垂直向下，所以这不可能成立．解释这一明显的矛盾．

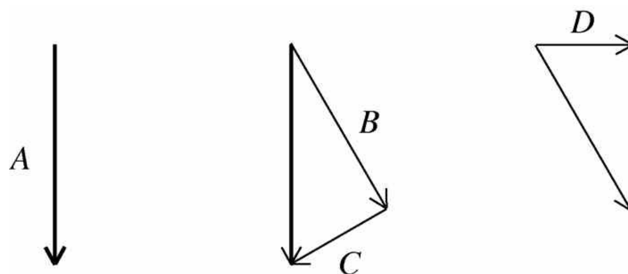


图　2-59

问题**22**　回到图2-24中的梯子．假设它仍然以60°的角斜靠在光滑的墙上，但只有190磅的负载．计算此时力F、P和H的大小．

问题**23**　假设图2-24中的梯子有240磅的负载，但它以72°而非60°的角斜靠在光滑的墙上．计算此时力F、P和H的大小．计算这些力沿梯子倾斜方向的分量，证明它们互相平衡．【提示：利用问题13的结论．】

问题**24**　图2-60展示了一架梯子，它受到地板对它的垂直方向的力U和绳子对它的垂直拉力V支撑并保持平衡．梯子的倾斜角为β，α是梯子与

垂直方向的夹角．令W为梯子的重量．证明$W=U+V$，并证明梯子沿其倾斜方向的向下推力为．$W\cos\alpha - V\cos\alpha = U\cos\alpha$．据此推出$B$点的摩擦力$F$必须为零．

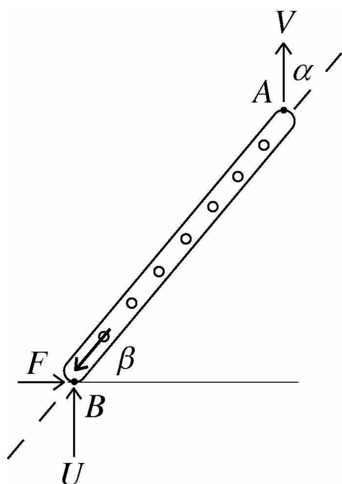


图　**2-60**

问题**25**　调查彩图4中雅典卫城脚下半圆拱券的起源．

问题**26**　研究加德高架渠的最底层拱．描述该结构有可能的崩塌方式．

问题**27**　图2-61展示了帕尔迈拉的罗马废墟．帕尔迈拉即如今的塔德莫，它位于叙利亚沙漠的腹地．对该拱中拱顶石的滑落，2.5节中的哪些知识能给出合理的解释？



图**2-61**　帕尔迈拉（今叙利亚境内）的罗马拱，**Odilia**摄

问题**28**　图2-62中的拱屹立在希腊罗马的以弗所城内．它的跨度约为6英尺．假设拱石由砂岩制成，每立方英尺重140磅．考虑理想的情况，即该拱的5块拱石全部相同．估计该拱中拱石的重量，再估计上方3块拱石对底层两块所产生的向外的力的水平分量．【提示：通过将拱的表面看成是两个同心半圆的差来估计拱石的体积．给出相应尺寸的估计值．】



图**2-62**　以弗所城（今土耳其境内）的罗马拱

问题**29**　考虑2.5节研究的罗马拱，其中W=300且$\alpha = 20°$．假设该拱只有自重，没有任何额外负载．通过复习，可知上方3块拱石产生的每一侧的水平侧推力的估计值均为$H_0 + H_1 = 1371$ 磅．在图2-63中，上方的3块拱石被粘接成一块大的拱顶石，重900磅．估计这块大的拱顶石在每侧产生的水平侧推力．为什么此时的侧推力比早先的1371磅要小得多？在回答这个问题之前，先考虑半圆拱被筑成一整块的情况．图2-64展示了这样的实心拱．这样的拱对两根支撑它的柱子产生的水平力是多少？重力会沿拱的方向产生水平力吗？如果产生，拱如何处理它们？

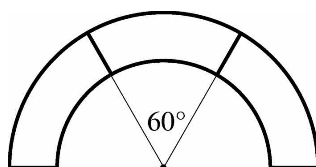


图　**2-63**



图**2-64**　罗马哈德良别墅庭院内的拱廊

问题**30**　研究图2-65中的拱．你认为它的拱石有可能不粘接在一起吗？拱有可能只靠拱石接触面处的力而维持原状吗？对后一种情况，解释拱石如何克服向外的水平侧推力．



图**2-65**　今摩洛哥境内罗马废墟瓦卢比利斯中的拱，版权归**pabloqtoo**所有

问题**31**　回到对拱石受力情况的讨论．图2-66与图2-31类似，也用于分析拱顶石下方（左侧）的第二块拱石．用该图证明作用在该拱石上的向上推力P_2为$P_2 = W \times \dfrac{1}{\sin\dfrac{5\alpha}{2}}$，其水平分量为$H_2 = W \times \dfrac{1}{\tan\dfrac{5\alpha}{2}}$．

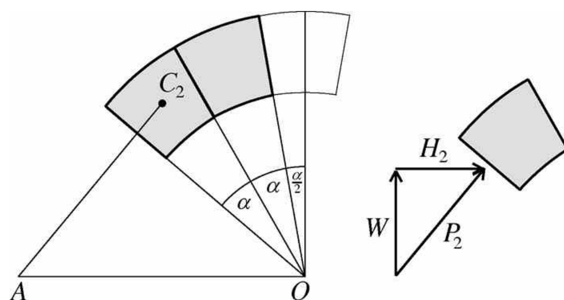


图 **2-66**

问题**32** 我们在分析拱石产生的水平侧推力时，忽略了摩擦力的影响．考虑拱 石接触面处的摩擦力作用，对该分析进行修正．修正后这些水平侧推力的估计值是变得更大还是更小？【提示：研究图2-28(b)．】

以下3个问题研究2.6节中椭圆的构造．

问题**33** 用等边三角形*T*构造一个短轴长为150英尺，长轴长为200英尺的椭圆． $b=s$和r的长度应取多少？

问题**34** 设L和S是由三角形构造的椭圆的长短轴的长度．证明用固定三角形构 造的所有椭圆其L-S值均相等．

问题**35** 罗马竞技场外部椭圆的长轴和短轴分别约为615英尺和510英尺．而罗 马竞技场内竞技区的内椭圆其长轴约为287英尺，短轴约为180英尺．这两个椭圆能用同一个等边三角形（$b=s$=143英尺）设计吗？

问题**36** 寻找纽约市内纽约证券交易所和华盛顿特区内的杰弗逊纪念堂的图片．它们让你想起了本章提到的哪些建筑物？

讨论**2.1** 帕提农神庙的柱子 我们在2.1节了解到，帕提农神庙的建设者让其正面的柱子稍微向内倾斜．有些严肃的建筑文献提到，这种向内的倾斜非常精确，以至于如果将正面柱子的中轴线向上延长，它们就会在帕提农神庙上方的高空中交于一点．而这个必定存在的点的高度则各不相同．一篇报告指出是6800英尺，另一篇则认为是16 200英尺．图2-67绘出了正面角落上的柱子，展示了将两根角落柱子的中轴延长后交于有争议的一点．该图利用了帕提农神庙正面宽110英尺的事实（不过它没有按比例画）．角α是柱子的倾斜角．假设帕提农神庙的希腊建筑者

如上面所述，想要得到中轴延长线的交点．因为 $\tan\alpha = \frac{6800}{55}$ ，所以他们

需要使α的取值非常接近89.54°．（确切地说，需要 $\alpha = 89.5366°$．）

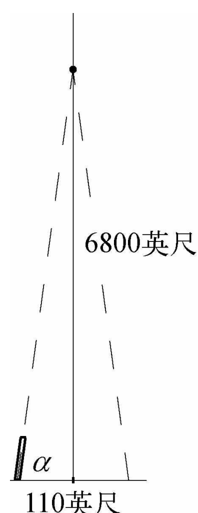


图 **2-67**

问题**37** 讨论竭尽全力竖立柱子时α角的任何最轻微的误差所带来的后果．例 如，考虑 $\alpha = 89.55°$或 $\alpha = 89.53°$，研究该误差对轴线交点问题的影响．帕提农神庙的建筑师本来可以成功地使巨型柱子的轴线以上面所说的方式交于一点，这是合理的吗？如果他们确实成功地做到了，现今帕提农神庙的轴线有可能以这种方式交于一点吗？帕提农神庙的历史中有什么事件表明这是不可能的？

讨论**2.2** 黄金矩形和五边形 这部分内容补充了欧几里得《几何原本》中对由图2-11(b)中的五角星所确定的矩形是黄金矩形的证明．在证明可以用尺规画出72°角时需要用到这些知识．图2-68给出了一个正五边形．它的5个顶点都位于圆上，5条边的长度相等．其边长为s，对角线长d．点O是圆和五边形的中心．考虑从中心点O到两个相邻顶点的线段．注意两条线段间的夹角为$\frac{360°}{5} = 72°$．这两条线段和五边形的边一起确定的三角形是等腰三角形．可知三角形的其他两个角均为54°．因此五边形两条相邻边间的夹角为108°．将五边形的顶点记为A、B、C、D和E．设M为两条对角线AC和BE的交点，考虑图2-69．因为B点处的角为108°，$\triangle ABC$是等腰三角形，则有$\angle BAC = 36°$．因此 $\angle BAM = 36°$．用同样的方法，得$\angle ABM = 36°$．这就表明$\angle AMB = 108°$．因为对应角相等，故三角形ABC和AMB相似．

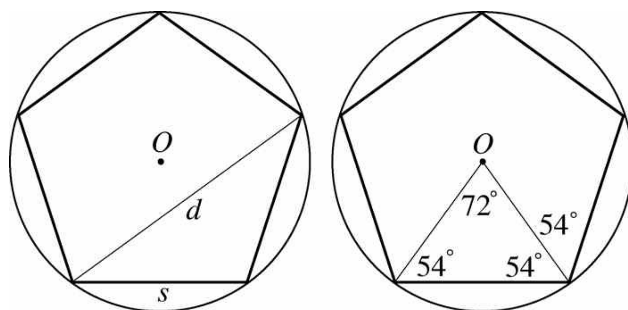


图　**2-68**

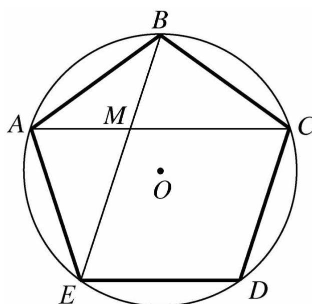


图　**2-69**

我们下面研究四边形*MEDC*．欧几里得先证明了*MEDC*为平行四边形．我们知道该四边形在*M*和*D*点处的角都等于108°．其在*C*和*E*点处的角均为108°- 36°= 72°．因此这两个角也都相等，则如前面所述，*MEDC*为平行四边形．因为相邻的边*ED*和*DC*相等，则平行四边形*MEDC*的四条边相等．因为*s*和*d*是五边形的边和对角线的长度，欧几里得知道*MC*=*ED*=*s*，*AM*=*d*-*s*．根据△*ABC*和△*AMB*相似，他能得到

$$\frac{d}{s}=\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AM}=\frac{MC}{AM}=\frac{s}{d-s}$$

注意，$\frac{s}{d}=\frac{d-s}{s}=\frac{d}{s}-1$．然后则有$\frac{d}{s}-\left(\frac{d}{s}\right)^{-1}-1=0$，因此令$x=\frac{d}{s}$，它是多项式 $x^2 - x - 1$的正根．因此$\frac{d}{s}$是黄金分割率$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．欧几里得已经确定五边形对角线与其边的比率是黄金分割率．因此$\frac{MC}{AM}=\phi$且

$\frac{AC}{MC}=\frac{AC}{AB}=\phi$. 图2-70中，$N$是对角线$AC$和$BD$的交点．根据对称性，$AN=MC$，因此

$$\frac{AC}{AN}=\phi=\frac{AN}{AM}$$

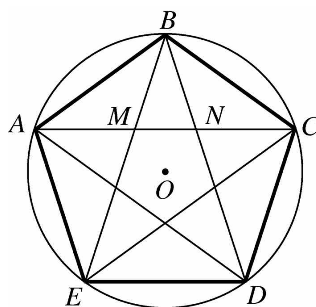


图　**2-70**

则知以AM为短边，AN为长边的矩形为黄金矩形．剩下的工作就是证明该图中心的小五边形是正的（这不过是例行公事罢了）．通过延长正五边形的边可以确定以A、B、C、D、E为拐角的五角星．证明完成．

注意对角线AC，可知N是AC的黄金分割点，M是AN的黄金分割点．因为一条对角线与其他对角线的性质相似，对该五边形的5条对角线中的每一条而言结论都成立．尤其是由五边形的边所确定的五角星，其中充满了黄金分割率．

现在五角星得到了广泛应用．它用来装饰美国国旗，是美国军事权利的象征，它还被应用到各种商品上．它还被称为五角星形，尤其在它和外接圆一起绘制时．五角星形也成为一些女巫信徒和魔鬼崇拜者的象征，其原因则超出了本文的讨论范围．

讨论**2.3**　更多尺规作图的问题　我们在2.2节已看到n=3、4、5、6和8的正n边形能用尺规进行构造．但是，n=7和n=9的正n边形不能被构造．因为能构造正五边形，所以也能构造正十边形．表2-1总结了$n \le 30$时正n边形能否被构造的情况．第二行给出了能或不能构造它们的原因．举个例子，因为正七边形不能被构造，所以正十四边形不能被构造．由于能构造18°角，所以能构造正二十边形．

表**2-1**　***n*** **≤ 30** 时能否构造正***n***边形

七边形	八边形	九边形	十边形	十一边形	十二边形	十三边形	十四边形
不能	能	不能	能	不能	能	不能	不能
	45°		36°		30°		7 边形
十五边形	十六边形	十七边形	十八边形	十九边形	二十边形	二十一边形	二十二边形
能	能	能	不能	不能	能	不能	不能
24°	22.5°	高斯	9 边形		18°		11 边形
二十三边形	二十四边形	二十五边形	二十六边形	二十七边形	二十八边形	二十九边形	三十边形
不能	能	不能	不能	不能	不能	不能	能
	30°		13 边形		14 边形		24°

我们很难回答某种形状能否被构造的问题．只有当这个问题转化到抽象代数和数论领域之后，它才能被解决．伟大的德国数学家卡尔·弗里德里克·高斯（1777—1855）了解这一基本事实．参见文中的表，他知道正七边形、正九边形、正十一边形、正十三边形、正十九边形、正二十三边形、正二十九边形不能被构造，而正十七边形能被构造．图2-71绘出了其中的一种构造．（*J*、*L*和*K*是正十七边形的顶点，剩下的点可以用它们进行划分．）高斯知道这一事实，但对它们并没有提供数学证明．只有在法国数学家皮埃尔·洛朗·万芝尔（1814—1848）和德国数学家卡尔·路易斯·费迪南德·林德曼（1852—1939）填补完成这个迷题的最后一块重要部分后，它才最终得以解决．这一解答包括了对古希腊3个著名的构造问题的回答．

i. 能三等分一个角吗？这是“角的三等分”的问题．通过尺规作图，可以将许多角进行三等分．因为能构造 60° - 45° = 15°，则 45°能被三等分．因为能构造 18°，54° - 30° = 24°和 12°角，则54°、72°、36°都能三等分．但是否任何角都能用尺规三等分呢？

ii. 给定一个圆，有可能构造一个面积和该圆相等的正方形吗？这是“化圆为方”的问题．由于半径为1的圆面积等于π，该问题就变为构造一条线段，它的长度为*s*，满足 $s^2 = \pi$，即 $s = \sqrt{\pi}$ ．这个问题有可能得到解决吗？

iii. 给定一条长为a的线段，有可能构造一条线段，其长度b满足$b^3 = 2a^3$吗？这是“倍立方”问题．取a=1，则构造时要求线段长度b满足 $b^3 = 2$，即$b = \sqrt[3]{2}$．这个问题有可能得到解决吗？

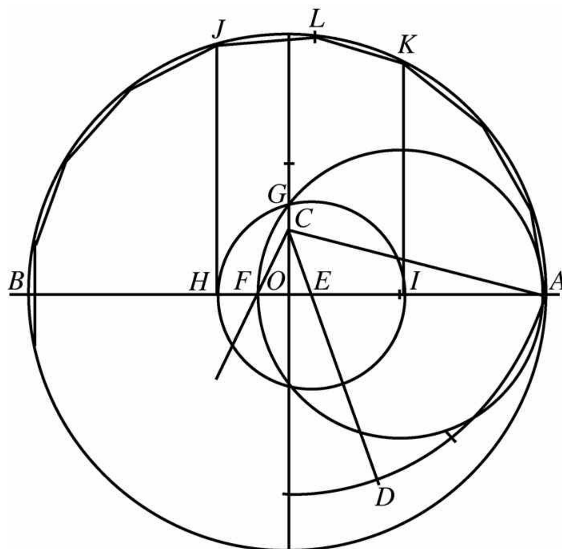


图**2-71**　正十七边形的构造

问题**38**　用表2-1中的信息证明 60°角不能用尺规三等分．

问题7和问题8让我们认识到给定单位长度的线段，任何长度为$\frac{n}{m}$和$\sqrt{n}$都能被构造．但根据上述定理的推论，长度为上文(ii)和(iii)中的线段则不能构造．

第3章　受信仰启示的建筑

公元4世纪，罗马皇帝康斯坦丁承认基督教信仰，不久之后，基督教成为罗马的国教．基督徒重新将注意力从此世转到彼世，提出了圣经的故事及超自然解释，指导人类的行为方向．不管是希腊哲学家和数学家凭此分析世界的好奇心，还是罗马工程师用来使它变为现实的自信精神都没有得到多少发展．当康斯坦丁将帝国首都从罗马迁到拜占庭（之后很快更名为君士坦丁堡）时，罗马帝国及其基督教信仰分裂成东西两部分．基督教的东西分裂起初只是在文化和政治方面，公元11世纪，它成为很深的分歧，基督教信仰从而正式分裂成天主教和东正教．公元17世纪，伊斯兰信仰突然在阿拉伯半岛出现并迅速蔓延开来．此时，地中海周边及其北部和东部地区产生了3种广泛的文化群：东部拜占庭、西部天主教及伊斯兰文化．每种文化都受神权统治，由宗教塑造成型．艺术和建筑得到了发展，主要用来实现信仰的视觉表现以及建造礼拜堂．本章研究受这些信仰启示的一些非凡的建筑物．为了交待建筑背景，我们将用非常宽泛和简略的笔触，描写这些文化各自的特点．

罗马帝国的东部成为拜占庭帝国．它保留了罗马在政府、法律及行政方面的许多东西．希腊文化是主要的文化成分，但也受叙利亚、埃及、波斯及东部地区的文化影响．基督教是占主要地位的、统一并有组织的力量．皇帝从上帝那里得到授权，举行各种精心准备的仪式，用绝对权力进行统治．拜占庭帝国约持续了11个世纪之久，成为连接古代和现代世界的桥梁．6世纪初，拜占庭艺术家和工匠融合了希腊、罗马、基督教和东方元素，发展出一种装饰华丽的艺术和建筑．拜占庭建筑师更多地受到罗马形式而非古典希腊风格的启发，他们偏爱拱券、拱顶和穹顶，而不是柱子、檐壁和山花．其教堂特点是半球形穹顶覆盖在方形或八角形排列的拱券上．他们用拱顶、半穹和拱廊这样的支撑结构环绕在中央穹顶周围．拜占庭建筑人员极其依赖砖和灰泥，不过他们也大量使用大理石．拜占庭艺术家用壁画及蓝色与金色背景上精美且色彩明亮的石头和玻璃马赛克来装饰建筑内表面．按照已建立的传统，他们的圣像以固定的形式展现宗教主题．珠宝匠把宝石嵌到柱子和墙上，金属匠添加金和银，木匠雕刻围屏和栏杆，织工悬挂挂毯、铺设地毯、给祭坛盖上刺绣和丝绸．从未有一种艺术色彩如此绚丽，穹顶和拱顶弯曲表面装饰地如此堂皇．君士坦丁堡内的圣索菲亚大教堂是这种建筑形式的最耀眼的例子．拜占庭帝国持续受到伊斯兰扩张的压力．8世纪之后，它的疆域

只剩下如今的土耳其和巴尔干半岛（包括希腊），15世纪中期，君士坦丁堡陷落到伊斯兰势力手中，拜占庭帝国灭亡．

7世纪20年代，伊斯兰教在阿拉伯半岛的麦地那和麦加出现．受简单神学无一是主，唯有安拉，默罕默德是主的使者的驱策，安拉的部队用不到30年的时间，横扫如今的中东地区（沙特阿拉伯、埃及、巴勒斯坦、叙利亚、伊拉克、伊朗和阿富汗）．从8世纪开始，几股伊斯兰势力取得如今的中东，到达东地中海附近，穿过北非，控制了大部分西班牙半岛．起初，伊斯兰帝国从大马士革（今叙利亚境内）接受统治，但很快巴格达（今伊拉克境内）建成，作为新的首都．巴格达距离古代城市巴比伦的原址不远，很快成为繁荣的商业、文化和学术中心．到9世纪，它的人口数达到800 000，比君士坦丁堡还要多．使者被派出去学习希腊的哲学、数学及科学原文（以及来自波斯和印度的著作）．中国用植物纤维造纸的新技术能生产一种耐用且便宜的产品，取代了易碎的草纸和昂贵的羊皮纸．学术原文被翻译成阿拉伯语并用手抄录下来．藏书万卷的图书馆吸引学术界的人进行研究和讨论．在9世纪到14世纪期间，伊斯兰的科学家、数学家及地理学家研究了这些作品，拓展了各自的领域．伊斯兰学术声名鹊起，闻名遐迩．伊斯兰文明宣称是其希腊学术的后继者，继承了它的精华．起先，游牧阿拉伯人几乎无需永久的建筑物．默罕默德自身也不用建筑，他认为“吞噬信众财富的最无益的事物就是建筑”．但很快伊斯兰统治者开始聚集其所有领地中的艺术家、石匠、粉刷工、木雕工、马赛克和瓷砖制造者．在拜占庭、叙利亚和波斯建筑师的指导下，这些工匠用大理石柱子、石拱、结实的拱顶及高耸的穹顶建造起辉煌的建筑，特别是清真寺．木头、金属、砖、灰泥、红陶和瓷砖成为构成华丽抽象的玻璃马赛克、釉面砖和雕花檐壁艺术的材料．

从6世纪开始，迁徙和侵略的日耳曼人、北欧人和亚洲人进入西罗马地区，使其组织秩序走向没落．在接下来的几个世纪里，征服、交流、适应和同化的过程将这些人与当地人融合在一起．修道院建立起来，僧侣将基督教信仰传播到莱茵河以东和多瑙河以北地区．到1100年年底，出现了新的人群，他们具有自己的种族、文化和语言特征．他们形成了各种各样的王国和公爵领地，范围覆盖如今的不列颠群岛、德国、意大利、法国、西班牙半岛的大部、斯堪的纳维亚的北部以及匈牙利和波兰的东部．这些王国和公爵领地中很多与神圣罗马帝国（起这个国名的目的是召唤基督教徒的向心力和古代罗马的力量）结成松散的联盟．他们联合起来，发起一系列十字军东征，意在从伊斯兰手中夺回圣地．妇女

和男人从他们的基督教信仰中获得启示、方向和生活目标．当地教堂是这种精神的视觉表现，是乡村或城镇的生活中心．它是做礼拜的地方、大众的集会之地以及孩子们的学校．11世纪到14世纪期间，许多大型教堂建造起来，它们接纳朝圣者．这些朝圣者去瞻仰圣徒的遗迹，在到达伟大的宗教圣殿的途中在这里歇脚．罗马巴西利卡原本是一种底层平面为矩形的行政性建筑，由室内柱廊形成中央走廊，有多层斜屋顶．后来它演变成有罗马拱券、小窗户和大型墙壁的罗马式大教堂．因为容易着火，木制天花板和屋顶结构被砌筑拱顶代替．砖瓦匠大师和主建筑人员用柱、墩柱和拱券系统解决了支撑这些沉重拱顶的难题．那时，他们建造克服地心引力的石头框架来支撑哥特时代教堂的拱顶和高耸的尖顶．这些不朽的教堂的正门、窗户、雕塑和墙壁在精美雕刻的石头和色彩绚丽的玻璃板上讲述了（现在仍在讲述）圣经故事以及信仰的历史．这些教堂过去曾高高矗立（现在依旧矗立），好像要摆脱地面的限制，是神及人类世界和物质之上的精神王国的辉煌建筑象征．

3.1 圣索菲亚大教堂

拜占庭建筑的杰作圣索菲亚大教堂（Hagia Sophia，希腊语中Hagia意为“神圣的”，Sophia意为“智慧”）是世界上最伟大的建筑之一．令人简直不敢相信的是，它是在拜占庭皇帝查士丁尼统治期间，即公元532年到公元537年这样极短的时间内建成的．它的两个建筑师是数学家和科学家，精通几何学和工程．完成这座不朽教堂的空前设计需要他们的所有才能．建筑的中心部分包含4个正方形排放的大型半圆拱券，其顶部由一个半球形穹顶覆盖．图3-1绘出了这种设计的基本要素．穹顶的圆形底面和4个拱券形成了4个弯曲的三角形结构，称为帆拱．大型的支撑柱称为墩柱．圣索菲亚大教堂穹顶底部的直径约为32米，其最高点距底部为54.9米．穹顶下的一对大型拱券通往半穹顶，半穹顶则通向凹室，它们一起给教堂提供了连续的76.2米长的空旷空间．穹顶底部围绕着有40个窗户的圆形拱廊，给人一种穹顶正漂浮在它所创造的高空中的感觉．教堂的内表面贴满了大理石、壁画和金色的马赛克．彩图6中使用彩色马赛克精心绘制的作品告诉我们这种艺术形式会将建筑变得多么精美和辉煌．教堂内部及穹顶、拱券和拱顶具有超凡脱俗的品质．从高度不同的窗户流泻进来的光线照射着内表面，丰富了它们的艺术性，使其更加绚丽．精心准备的宗教仪式就在这一空间内举行，由希腊东正教牧师在祭坛周围的圣殿中主持．入口附近皇室成员的参与体现了拜占庭帝国具有教会与君权的双重性．任何目睹这些仪式的经历都一定是令人难忘的．公元1000年前后，这些亲历者有基辅的弗拉基米尔王子派出的使者，他们被派往该地区的4个伟大的宗教（伊斯兰教、犹太教以及拉丁和拜占庭基督教）中心．这些人不断描述参观圣索菲亚大教堂的经历，这一定对王子作出俄罗斯国家应该信奉拜占庭基督教的决定产生了影响：

> 我们不知道是在天堂还是在地上．若在地上，没有这样辉煌，这样美丽，我们已不知如何用语言描述．我们只知道上帝在这儿，与人们在一起，他们的仪式远远超过其他国家的．我们不能忘记那美丽．

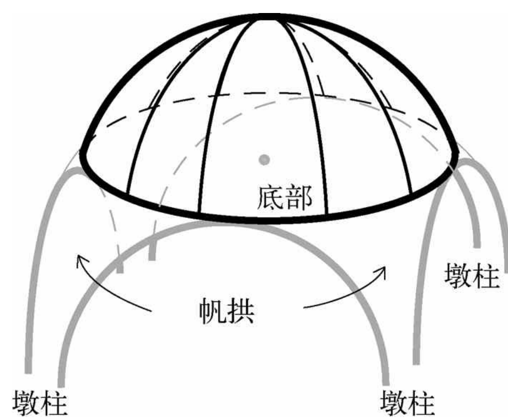
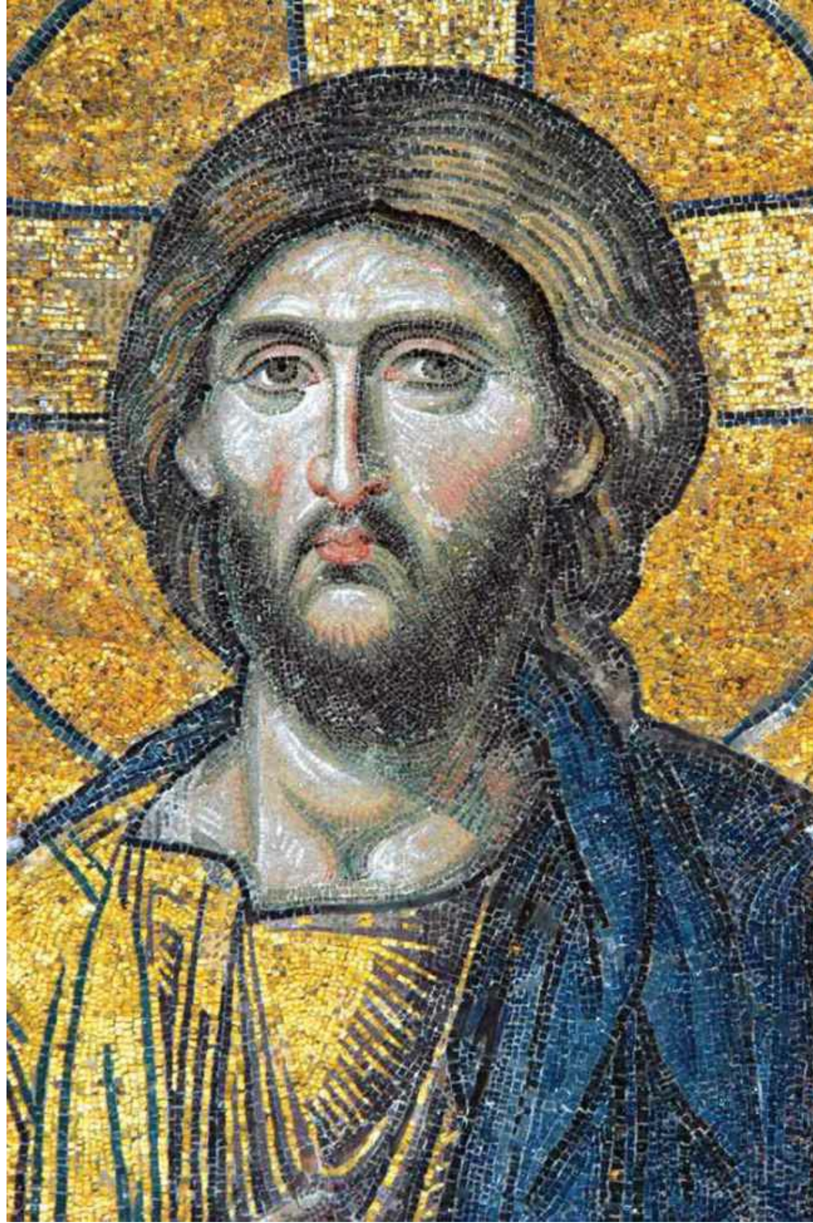


图**3-1**　抽象的圣索菲亚教堂穹顶



彩图 **6**　13 世纪圣索菲亚大教堂中贴马赛克的基督救世主．PavleMarjanovic/Shutterstock，版权归 Shutterstock 所有

1453年，该城落入奥斯曼土耳其人之手，圣索菲亚大教堂转为清真寺，它美丽的马赛克被抹上了灰泥．但是，彩图7告诉我们，400年之后圣索菲亚大教堂的内部仍然金碧辉煌．



彩图 **7**　加斯帕奇·佛萨提，《作为清真寺的圣索菲亚大教堂》（*The Hagia as Mosque*）．选自《君士坦丁堡的圣索菲亚清真寺，最近听从阿卜杜勒·迈吉德苏丹陛下的命令修复过，根据加斯帕奇·佛萨提骑士的原始绘画制作》（*Aya Sofia, Constantinople, as recently restored by order of H.M. the sultan Abdul Medjid, from the original drawings by Chevalier Gaspard Fossati*），由 Louis Haghe, P. & D. Colnaghi & Co. 平板印刷，伦敦，1852 年．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室，Albert

M. Friend'15 遗赠

让我们来看看圣索菲亚大教堂的基础结构．图3-2展示了经穹顶、半穹和凹室的教堂截面图．穹顶的壳由砖和灰泥建成，约有2.5英尺厚．它们的内外表面是球心相同的球体的一部分．它们的圆形截面和公共球心分别用黑色（外圆和球心）和白色（内圆）加粗表示．40根拱肋从穹顶顶部向下辐射，与雨伞的伞骨一样．它们向下延伸到40扇窗户之间，支撑着穹顶并将其固定到它的圆形底部上．圣索菲亚大教堂建设人员所面临的基本结构难题与4个世纪以前罗马万神殿建筑师所面临的一样．砖和灰泥的抗拉强度不足，意味着作用在壳上的环向应力要由穹顶底部坚固的支撑结构来控制，该应力由穹顶重量引起的向下的推力产生．正如我们在2.7节所看到的，罗马万神殿中的这一结构是对称、封闭的大型圆柱体，穹顶就竖立在它上面．从以上对圣索菲亚大教堂的简单描述中可以很容易看出，它设计的几何形状比封闭圆柱体要复杂得多．它的穹顶坐落在4个大型拱券及拱券间的帆拱上．其中两个拱券通向半穹，形成教堂狭长的内部空间．其他两个拱券，如彩图7和图3-2所示，则被开了几排窗户和拱廊的墙所封闭．因此，与万神殿穹顶的支撑结构不同，圣索菲亚大教堂的支撑结构并不对称．这是有问题的，它意味着圣索菲亚大教堂穹顶在其底部周围的支撑曾经（现在依然）并不均匀．

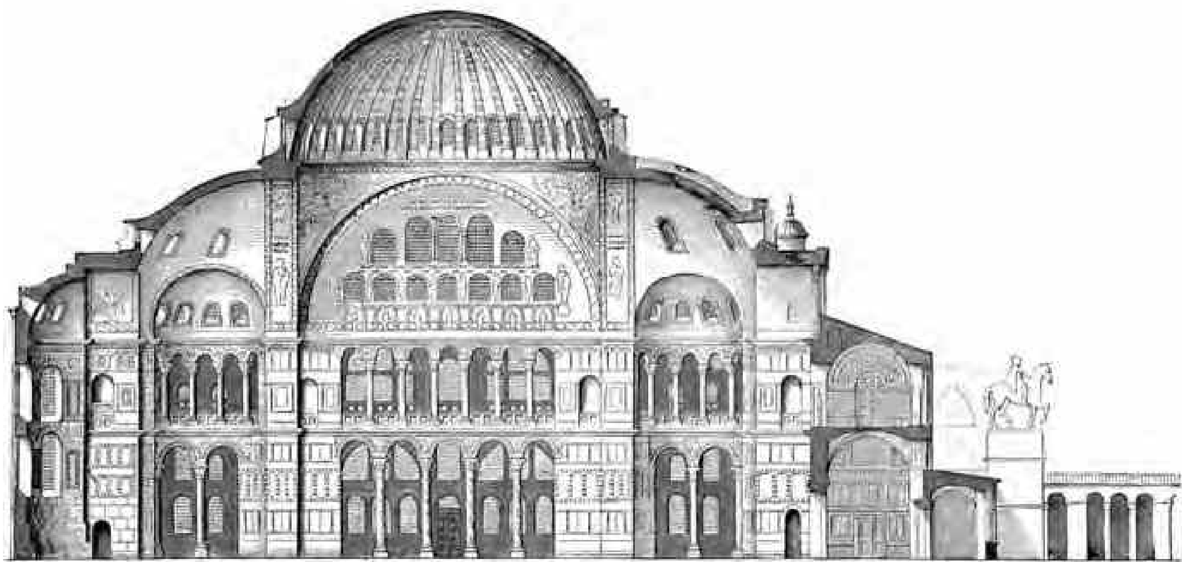


图**3-2**　圣索菲亚大教堂的截面图，选自**Wilhelm Lübke** 和**Max Semrau**的《艺术史概要》（***Grundriß der Kunstgeschichte***）**. M. Auflage. Paul Neff Verlag**出版社，埃斯林格尔（**Esslinger**）**, 1908**

让我们停下来思考一下一排40扇窗户上方的穹顶的壳所产生的力．图3-3为从图3-2抽象出来的穹顶横截面的细节．图中给出了窗户的位置、窗户之间的拱肋和支撑扶壁．两个圆弧是壳的内外表面的截面图．下面关于穹顶尺寸和建筑材料的信息来自最近的研究．从两个圆的公共圆心发出的射线与水平面呈20°角．壳的内外球面半径分别为r=50英尺、R=52.5英尺．二者的差2.5英尺是壳的厚度．壳的砖和灰泥的平均重量是每立方英尺约110磅．7.2节应用基础微积分推出有窗户的圆形长廊上方穹顶壳的体积约为27 600立方英尺．这表明这部分壳的重量约为27 600立方英尺×110磅/立方英尺≈3 000 000磅．这些重量平均分布在40根支撑拱肋上，我们得出每根拱肋载重约75 000磅．这意味着如果P是拱肋产生的斜推力，则P的垂直分量大小约为75 000磅．从图3-4可得$\sin 70^\circ = \frac{75\,000}{P}$，因此$P \approx \frac{75\,000}{\sin 70^\circ} \approx 80\,000$，磅．推力$P$的水平分量$H$满足$\tan 70^\circ = \frac{75\,000}{H}$．因此，$H \approx \frac{75\,000}{\tan 70^\circ} \approx 27\,000$磅．这是一根拱肋向外推穹顶底部的力的估计值．

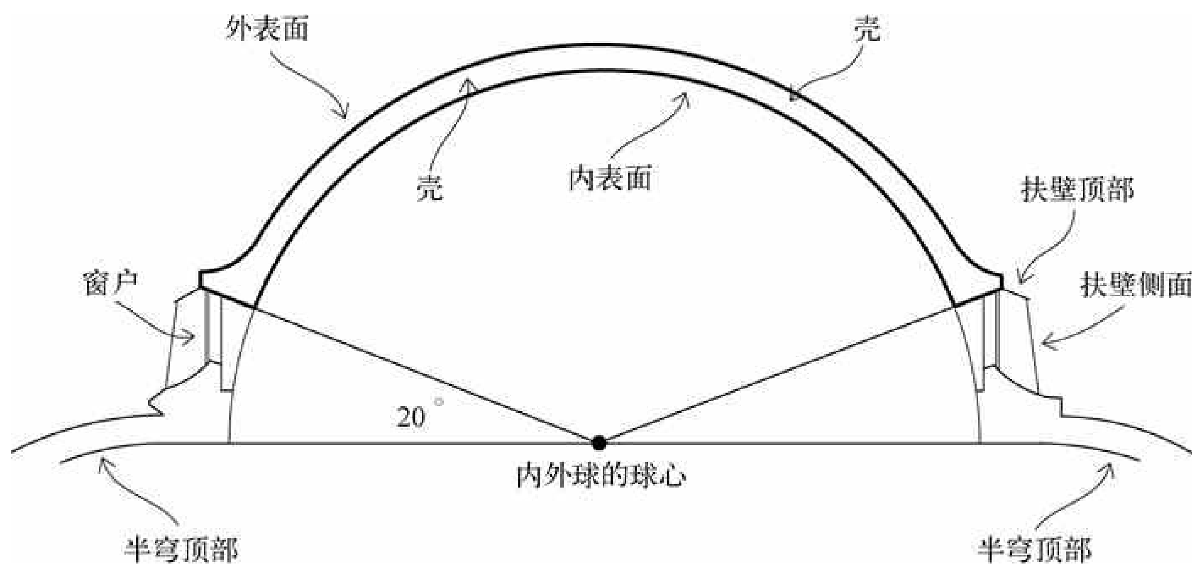


图　**3-3**

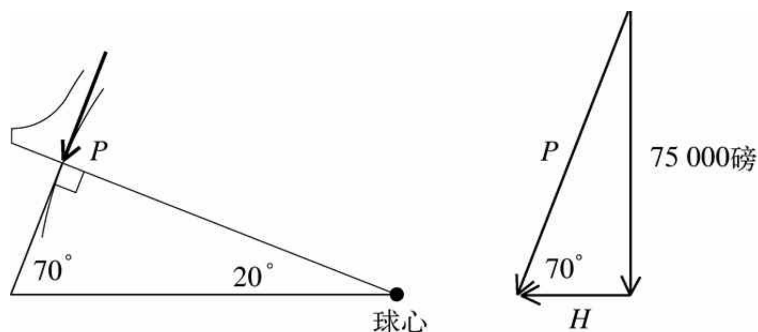


图　**3-4**

圣索菲亚大教堂的建筑师清楚穹顶向外的侧推力会带来的问题（尽管不是以数值计算的形式），他们采取一些措施来对其进行限制．一个矩形的屋顶结构在底部支撑着穹顶，它有4个敦实的砌筑而成的角，就在帆拱的上面．在图3-5中排成圆形的窗户下方能看到它．这一结构与4个主拱券由前面提到的4根石制墩柱所承载．这些墩柱建在坚硬的岩石地基上，在图3-2中用黑色加粗表示．穹顶向外的侧推力用两种方法限制．在狭长有开口的方向，它被向下引导，由支撑半穹及远处的倾斜结构所吸收（如图3-2和图3-5所示）．从原理上来说，这和罗马拱券向下传送负载的方式类似．在垂直方向，向外的侧推力被矩形屋顶两边下方的外部大拱券所限制．图3-5可以看到其中一个．



图**3-5**　如今的圣索菲亚大教堂南侧．**4**个尖塔是在教堂转为清真寺后增加的宣礼塔．**Terry Donofrio**摄

圣索菲亚大教堂曾有过一段艰难的历史．建筑物所受到的应力使其在地震时尤其脆弱，而地震在希腊和土耳其都很常见．在穹顶完工仅20年后，就有一场地震使其部分坍塌．到563年，穹顶已被完全重建．这一穹顶就是前面我们所讨论的．如今它依然维持原状．就在那时，人们增加了40个扶壁以支撑穹顶的窗户之间的40根拱肋．它们在图3-5中可以看到．在10世纪和14世纪，又有地震对穹顶带来严重的损害，每次都需要大量修复．这些修复也解决了随时间推移而出现的基础结构问题．包括校正主墩柱的变形．穹顶和两个大型外拱券在两个拱券方向产生的力为半穹及其后面的结构所吸收．但两个大拱券受穹顶的侧推力作用向外倾斜，因此人们在拱的旁边增加了巨大的扶壁来对其进行稳固．图3-5中能看到扶壁中的两个．加进去限制穹顶侧推力的结构部件并没有侵占教堂的内部空间，但它们确实影响了教堂的外表．圣索菲亚大教堂这个像土堆一样的外表不像内部一样逐渐变得优雅．

应力作用所带来的结构损坏以及应对这些损坏所做的大量修复使穹顶的底部不再是一个圆，而是椭圆．图3-6给出了穹顶底部的水平横截面．注意在两个半穹开口方向上的直径约比两个大型外拱券间的直径短3.5英尺．这与两个半穹承担保持稳定的角色及大型拱券因受力向外倾斜相一致．图3-6还给出了拱肋的位置，它们处在穹顶底部的窗户之间，编号为1~40，它还标明了穹顶的不同部分在何时受过修复．

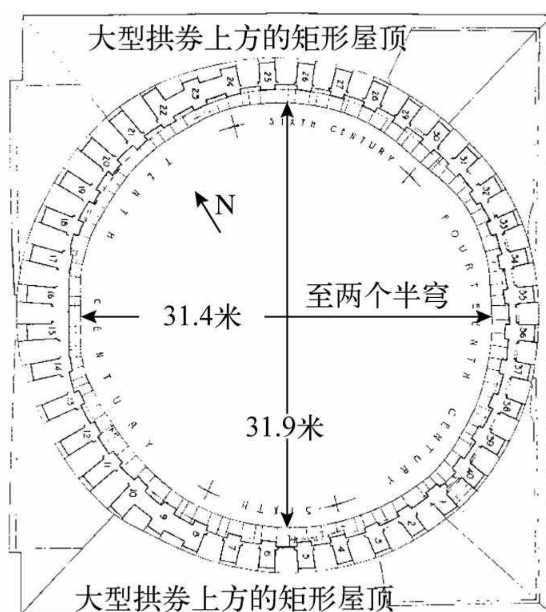


图**3-6**　圣索菲亚大教堂穹顶底部截面图．选自《伊斯坦布尔的圣索菲亚大教堂：近期对其结构的初步检查报告》（***Haghia Sophia, Istanbul: Preliminary Report of a Recenct Examination of the Structure***），作者为**William Emerson** 和**Robert L. van Nice**，《美国考古学报》（***American Journal of Archaeology***），第**47**卷第**4**期（**1943**年**10**月**~12**月），**p424**

19世纪中期，这座伟大的建筑又一次需要大规模修复．当时苏丹请两个瑞士建筑师佛萨提兄弟来从事这一工作．为更好地限制圣索菲亚大教堂穹顶向外的力，他们在其底部缠绕上一条铁链．这一措施在一个世纪前支撑罗马圣彼得大教堂穹顶时就已用过．彩图7是25张平版印刷的彩图集中的一幅，它由两兄弟中的一个制成，用来记录重修后的效果．如今，在建成1500年之后，圣索菲亚大教堂（已于1935年转为博物馆）仍不失为一座庄严的建筑．

据说圣索菲亚大教堂的建筑师在设计和施工时应用了数学知识．尽管几何学明显地起到了作用，但简单的几何学并不能为大型建筑的稳定性提供大量知识．后来，伽利略深刻体会到这一点，他注意到仅仅凭几何学不能保证结构上的成功．没有证据表明，建造圣索菲亚大教堂时，应用数学已得到充分发展，能够为结构所需要承担的负载提供哪怕最基本的分析．几乎可以毫无疑问地说，圣索菲亚大教堂的建筑师直接或间接地依靠罗马拱形结构的设计和建造方法，而非靠理论分析．

3.2 伊斯兰的辉煌

伊斯兰建筑在清真寺中找到了最突出、最独特的表达形式．清真寺是祷告的场所，其中心要素是米拉哈布，即指向麦加方向的有花纹的祷告用壁龛．大型清真寺的门一般开向周边的矩形大庭院，院内有喷泉，用于穆斯林行洗礼．每座清真寺至少有一座塔，即宣礼塔，用以召唤信众祷告．重要的清真寺有几座宣礼塔．由于伊斯兰教严禁有动物、人类和神祇的形象，因此清真寺转而用被称为阿拉伯式花饰的繁复华丽的几何图形以及阿拉伯文的书法元素进行装饰．

耶路撒冷的岩石穹顶清真寺是最重要的一座早期伊斯兰圣殿，如图3-7所示．它于公元687年到691年建造在一块岩石上方，据说默罕默德正是从这块岩石上升入天堂．这里是朝圣者纪念先知的地方．该建筑呈八角形，直径67英尺的木结构穹顶从建筑中心的圆柱形砌筑鼓座上升起．它由内壳和外壳构成，每个壳都由32根向中心聚集的木拱肋所支撑．穹顶的内表面上绘有几何和书法图案，外部则覆盖着镀铅和金箔的木板．与圣索菲亚大教堂的穹顶不同，该木制穹顶不会带来结构难题，因为它质量轻，架在鼓座上就像是盖子盖在罐子上．



图**3-7**　耶路撒冷的岩石穹顶清真寺，公元**688**年~公元**692**年，**I. van**

der Wolf 摄

图3-8绘制了岩石穹顶清真寺的平面图．先从一个圆开始，在其内部内接一个正八边形．图3-8(a)添加了该圆的4条直径，如虚线所示，这样就得到了它们所确定的两个正方形*ABCD*和*EFGH*．这两个正方形相交，得到8个交点．这些点确定了图3-8(b)中标号为1到8的8根墩柱的位置．这些墩柱和它们之间的柱子（其位置没在图中显示）支撑着八角形屋顶．同样的8个点还是两对平行线段的端点．这些线段的4个交点确定了设置穹顶鼓座位置的内圆．这些交点还给出了4根墩柱的位置．这些墩柱和位于它们之间的4组每3根成一组的柱子承载着鼓座和穹顶．图3-8(b)展示了圆（圆心为点*O*）和4根墩柱以及12根柱子的位置．图3-9展示了岩石穹顶清真寺的内部，包括墩柱、柱子、入口以及先知之岩．注意立有圆柱的内部受到早期拜占庭传统的影响．但岩石穹顶清真寺的宏伟风格是不断上升的伊斯兰教力量的象征．

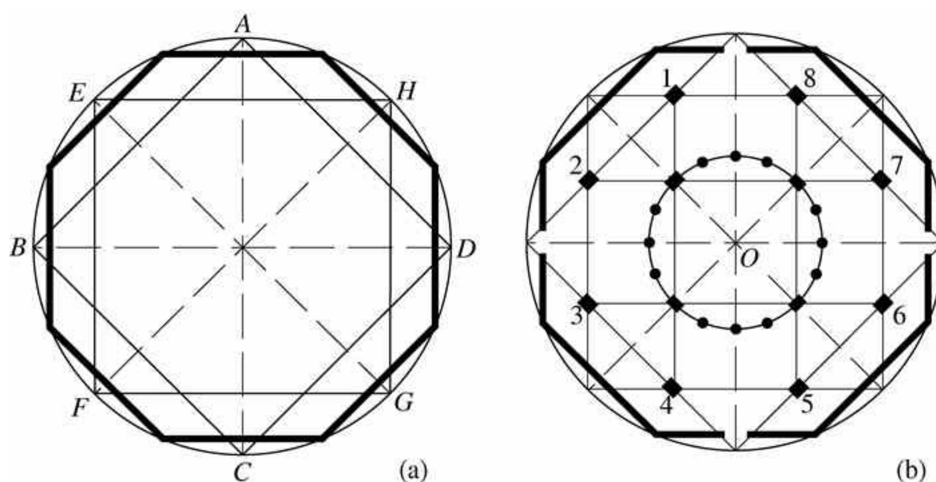


图**3-8**　岩石穹顶清真寺的几何形状



图**3-9**　岩石穹顶清真寺的内部．版权归**Damon Lynch**所有

很快，伊斯兰文化开始在科尔多瓦、格拉纳达、塞维利亚和阿拉伯西班牙的托莱多或者说安达卢斯（如今西班牙南部的安达卢斯亚地区的名字即起源于此）等城市繁荣起来．在这期间比利牛斯山脉以北的欧洲人民熬过黑暗时代，安达卢斯的居民享受到了花园、喷泉、流动的水以及有照明的街道．科尔多瓦作为首都和文化中心，是一座拥有哲学家、诗人和学者的城市．成千上万的学生在大学里学习哲学、法律、科学、数学和地理．伊斯兰的工程师和工匠在该城的瓜达基维尔河（Guadalquivir，阿拉伯语，意为“大河”）上重建了伟大的罗马石桥，它有16个拱，跨度约为244米．该桥如今还横跨在这条河上．科尔多瓦的大清真寺如今仍然屹立．它是在公元786年到988年间经过几个阶段建造完成的，其规划是一个规模约为180米×128米的大矩形．其内部空间让人惊叹不已，如今有一座天主教堂被拼接到其中心地带．彩图8和彩图9以及图3-10展现了它的某些无与伦比的艺术性．注意双拱券、马蹄形拱券、三叶拱券、尖拱券以及它们的华美细节．分析图3-10内的穹顶．穹顶底部的每个尖拱券都是拱券组合的一部分，将穹顶的负载向下传送到下方垂直的墙上．这种结构被称为突角拱．这一结构部件通常在伊斯兰建筑中使用，是一种广受欢迎的替代帆拱的方法．

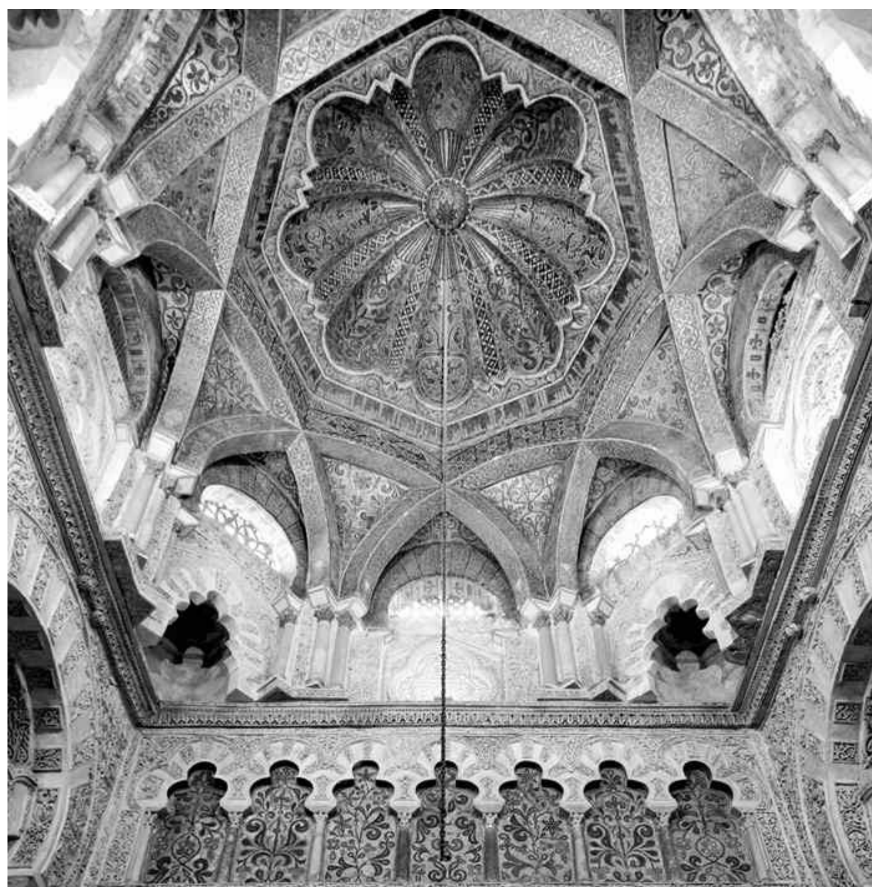
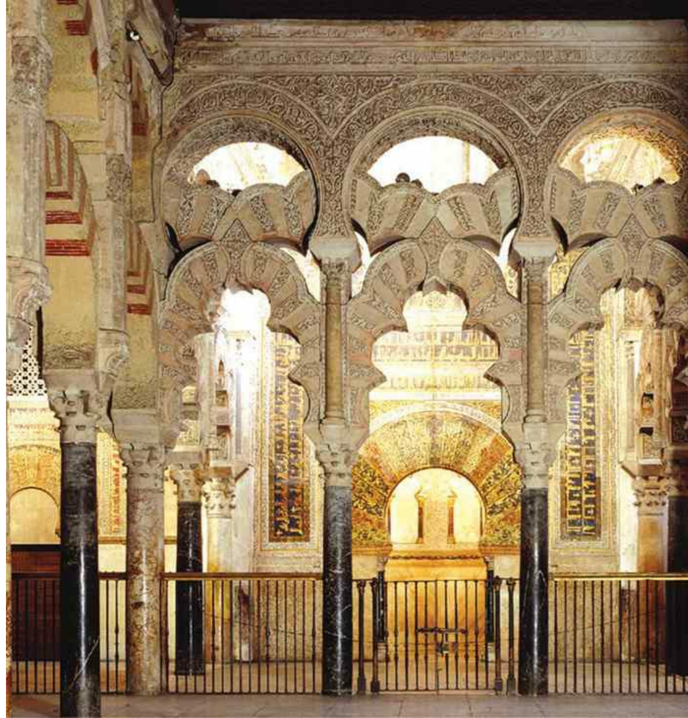


图**3-10**　科尔多瓦大清真寺米哈拉布上空的穹顶，**Richard Semik**摄



彩图 **8**　成排的双拱勾画出科尔多瓦大清真寺广阔的祷告厅，Timor Espallargas 摄



彩图 **9**　科尔多瓦大清真寺米哈拉布的 3 个叶拱和 1 个马蹄形拱

12世纪晚期，人们为塞维利亚的清真寺修建了一座壮丽的宣礼塔．塞维利亚重新被基督教控制后，这座清真寺转变成一座教堂．15世纪早期，这座受到地震损坏的建筑彻底倒塌，接下来的200年间，人们在原址上建造了一座新的大型教堂．它的规模超过了圣索菲亚大教堂，完工后，成为当时最大的一座基督教教堂．幸运的是，早先的宣礼塔尚且幸存．约70米高的宣礼塔被扩建，增加了用来放钟的一层和尖顶，成为新教堂的钟塔．尖顶顶部的风向标给出了这座塔的名字：吉拉达（Giralda）．这个词源自西班牙语“*gira*”，意为“转动的东西”．讽刺的是，转动的风向标具有女性的形状，代表不可动摇的美德信仰．彩图10描绘了这座钟塔．它仍然是当今塞维利亚城的一座著名的地标，其粉刷和砖砌的精巧花边图案以及拱形结构和阳台都是伊斯兰设计的出色代表．



彩图 **10**　塞维利亚内的吉拉达塔，GrahamColmTalk 摄

11世纪末，阿拉伯伊斯兰帝国开始衰落，土耳其王朝控制了伊斯兰领域的大部分地区，尤其是波斯（包括今伊朗在内的地区）．但是，辉煌的伊斯兰清真寺仍在继续建造．一个让人印象深刻的例子是伊斯法罕的星期五清真寺，其砖砌穹顶的开始建造时间可以追溯到11世纪．图3-11给出了对这座砖砌建筑的研究，体现了从底层加固两个八边形穹顶的尖拱券和突角拱的形状．图3-12显示了同样被突角拱支撑的圆形穹顶．注意它的壳内嵌入了拱肋．它们以双五角形的图案排列，向下延伸直到底部，承担着支撑结构的功能．图3-11和图3-12均让人看到了与内部进行镀金装饰的科尔多瓦大清真寺有相同建筑特色的施工技术．



图**3-11**　星期五清真寺的内部结构，伊朗伊斯法罕．**seier+seier**摄

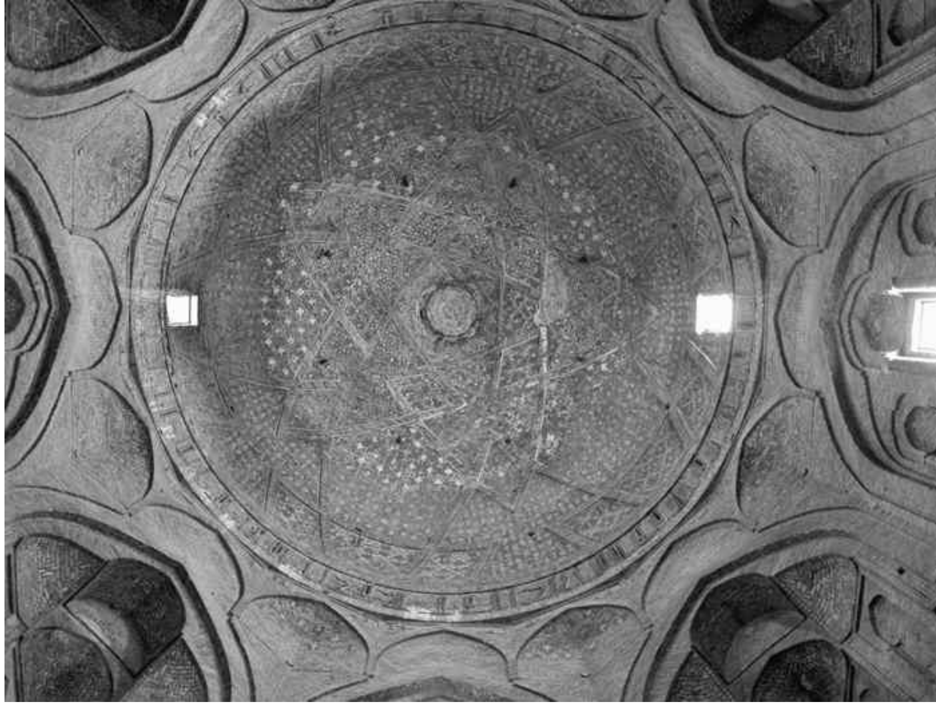


图**3-12**　星期五清真寺的圆形穹顶，伊朗．**seier+seier**摄

与其领土同时扩张的是伊斯兰教借鉴、吸收其他文化并将它们注入到自己精神中的才能．伊斯兰建筑是其中一个杰出的例子．伊斯兰教的建筑师使用了他们所征服的地域内遇到的结构形式（拱券、拱廊、穹顶），并用自己的创造力将其进行转化．结果得到的远非模仿和修改，而是新的设计与结构．一个多世纪之后，伊斯兰建筑的外观，包括它的装饰性元素、尖拱券和肋拱结构开始出现在欧洲中部．

3.3　罗马式建筑

当东方基督教偏爱用集中式理念设计教堂时，西方基督教则转向巴西利卡（basilica，源自皇室，希腊语中，basilikos意为“皇家的”）．这是一种有柱廊的大型矩形大厅，有倾斜的屋顶，罗马人用它来从事商业交易和法律事务．巴西利卡的矩形内部空间通常由平行的柱廊分成三部分或更多部分．罗马行政官坐在入口对面一端的拱形凹室内，一般是在一个高台上．在巴西利卡成为早期基督教教堂的模板后，中部的纵向空间成为中殿（nave，拉丁语中，navis意为“船”），拱形凹室成为后殿（apse，希腊语中，apsis意为“拱或拱顶”）．后殿是放主祭坛的地方．两层斜屋顶结构留出了放置窗户的空间，这是一种高侧窗（clerestory，源自拉丁语，意为“有光线的层”），开在中殿墙壁的高处．旧圣彼得教堂，如图3-13所示，展示了这种建筑形式．它于公元4世纪在罗马建成，公元16世纪，为了给新圣彼得教堂腾地方，它被夷为平地．新教堂是如今罗马的地标，也是天主教的强有力的象征．

图3-13表明旧圣彼得教堂的屋顶由木梁结构支撑．下面的研究集中在经过简化的顶部三角形构件上．忽略三角形中间的水平和竖直梁，假设剩下的3根梁是刚性的，彼此间用钉子固定．图3-14展现了这一构件（如今称为简单桁架）．我们假设三角形上的整个重力负载L（例如，单位为磅或吨）均作用于C点，且该结构稳定．该三角形结构将负载L向下沿两根倾斜的梁传递到A点和B点．这两个点由两堵竖直的墙支撑．假设该结构是对称的，在A点和B点的负载相等，且在A点和B点处的角斜边与水平面的夹角均为α．设两根梁中每一根所产生的斜向下推力的大小均为P．

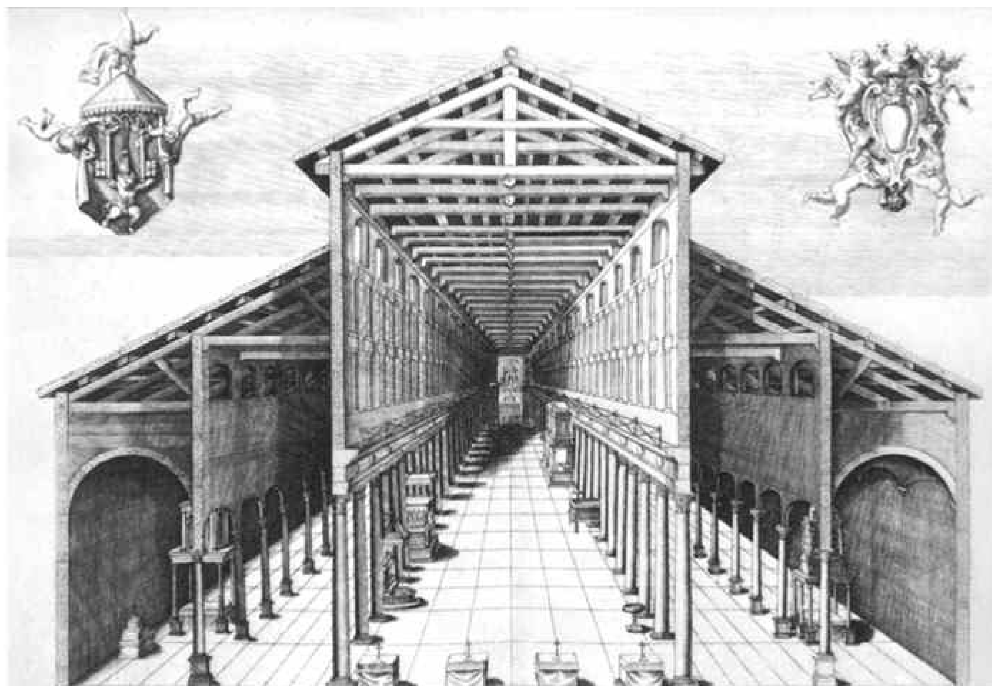


图**3-13**　罗马的旧圣彼得大教堂，建于公元**320~337**年．**Jacopo Grimaldi**素描于约**1590**年．选自《梵蒂冈的圣彼得大教堂》（***Architettura della Basi - lica di S. Pietro in Vatican***），**G. B. Costaguti**著，罗马，**1684**

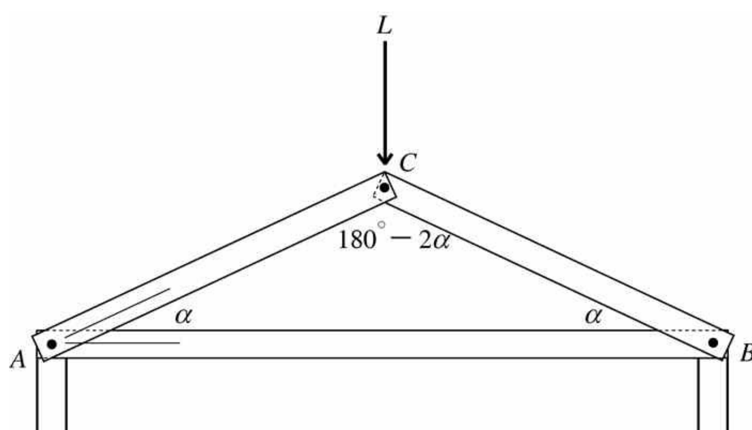


图**3-14**　三角形桁架

图3-15(a)将A点处的推力P分解成水平和垂直分量．图3-15(b)的受力分析图显示该结构在A点的受力情况．垂直的墙以$\frac{L}{2}$的力向上推，以克服P的垂直分量，称为系梁的水平梁用T=H的力向里拉，以克服P的水平分

量．注意两个斜梁被压缩，而系梁则被拉伸．图3-15(b)表明

$$\sin\alpha=\frac{L/2}{P} \text{ 且 } \tan\alpha=\frac{L/2}{T}$$

重新调整这两个方程后得

$$P=\frac{L}{2\sin\alpha} \text{ 且 } T=\frac{L}{2\tan\alpha}$$

正如我们所预料的，如果已知L和α，就能确定推力P和拉力T．根据对称性，在B点进行分析可以得到相同的结论．还能通过分析作用在该结构C点的力得到以上的方程．（见问题7．）

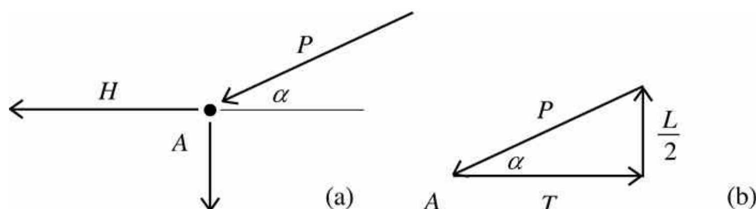


图**3-15**　两个受力分析图

设 α = 25°（它约等于图3-13中的对应角），L=10 000磅．则

$$P=\frac{10\,000}{2\sin 25^\circ}\approx 11\,800 \text{ 磅，} \quad T=\frac{10\,000}{2\tan 25^\circ}\approx 10\,700 \text{ 磅}$$

注意到水平系梁的拉力 T ≈ 10 700 磅，它比垂直负载L=10 000磅要大．水平系梁的拉力很大，不过木材的抗拉伸和抗挤压能力都不错．木材的强度（拉伸和挤压时）从软木的2100磅每平方英寸[1]到硬木的5700磅每平方英寸不等．具体值要根据木材特定的内部结构、潮湿度及纹理方向确定．

1 1平方英寸≈0.092 9平方米．——编者注

公元7世纪，日尔曼人停止了对欧洲中部地区的入侵．该地区开始从黑暗时代复苏，在接下来的几个世纪里，被基督教教化．公元1000年前后，更多的教堂被建造起来，出现了经过改进的罗马巴西利卡设计．基础设计得到了扩展， 在靠近后殿的地方增加了与中殿垂直的矩形空

间．这个新增的部分称为耳房，使平面呈十字形．中殿和耳房相交的空间称为十字交叉处．耳房在教堂内部作出了新的空间分割．后殿与耳房间的区域是高坛，它包括供牧师使用的主祭坛和供歌手及乐师使用的唱诗区．在中殿内，耳房另一侧的空间用来供人们礼拜．

一种采用巴西利卡式的风格被称为罗马式．虽然它们各有差异，但具有相同的元素，包括带高侧窗的斜屋顶结构和自由使用的半圆形罗马拱券．大型的砌筑拱形结构竖立在中殿、侧廊和耳房上空（一般被木框架屋顶覆盖，就像图3-13所示的旧圣彼得教堂那样）．半圆形筒拱顶及十字拱顶（由两个半圆形筒拱顶正交得到）比较常见．这些拱形结构的重量带来结构上的挑战．为了克服它们所产生的大侧推力，人们加入了沉重的柱子、墩柱和墙．这些大型砌筑构件与此前就有的罗马拱券以及墙上开凿的小窗户一起成为罗马式建筑的典型特征．

11世纪中叶，德国斯派尔城建造了一座巴西利卡式皇帝大教堂．12世纪早期，完成了入口区的扩建工作，增加了第二个耳堂．地下室在中殿下面，用作墓室，数名神圣的罗马帝国皇帝和德国国王都在此安息．皇帝大教堂是现存最大的罗马式教堂，长135米．尽管遭到战争和火灾的损害，之后又不断被大范围修复，该教堂仍然保留着原来的整体外形和结构规模．该建筑的外部竖立着两对高塔，它们在一端围住高坛，在另一端围住入口处的耳房．两个十字交叉处的上空都有一座八角形穹顶．彩图11的前景处可以看到这个穹顶和后殿旁的两座塔．这座教堂有一条带柱廊的走廊，围着教堂的整个外部，走廊高度恰好在屋顶轮廓线以下．两个穹顶的底部也装饰着类似的走廊．中殿、塔和穹顶都铺着锈蚀的浅绿色铜，与建筑物所用石头的粉红色相映成辉．在教堂内部，两个拱廊内有沉重的半圆形拱券，它们由大型柱墩支撑，将中殿和两个侧廊分隔开来．中殿上方高耸的十字拱顶被横跨中殿的半圆形拱券隔开．这些拱券由柱子支撑，贴着中殿的墙壁延伸下来，与拱廊的大型墩柱连在一起．



彩图 **11**　德国斯派尔的罗马式天主教堂，Karl Hoffmann 摄

法国在朝圣路沿线的歇脚点建立了许多辉煌的罗马式教堂．最好的一座

是勃艮第韦兹莱的圣玛德莱纳大教堂．这座教堂在12世纪建造了第一部分（之后几个世纪，这一部分还进行了几次修整）．韦兹莱的圣玛德莱纳大教堂内部结构与斯派尔的大教堂很像，不过规模要小一些，拱顶也较低．彩图12展示了它的内部构造．它中殿的天花板含有一系列等间距的十字拱顶，它们均垂直于中殿上方的长拱顶．注意这些十字拱顶是如何创造出留给高侧窗的空间的．这些十字拱顶被带条纹的半圆形拱券分隔，这些半圆形拱券与垂直的柱子相连，柱子又与沿中殿分布的拱廊的墩柱连在一起．这些拱券和柱子将中殿分成一系列称为隔间的部分．它最初的后殿在完工后不久就被火烧毁了，后来按哥特式进行了重建，具有了哥特式成排大窗户的特点．



彩图 **12**　法国韦兹莱的圣玛德莱纳大教堂及其中殿、隔间、十字拱顶、高侧窗和半圆形后殿，Vassil 摄

3.4　飞升的哥特式

12世纪初，罗马式外形逐渐被哥特式风格所取代．“哥特”一词最早用于意大利文艺复兴时期，作为对中世纪所有艺术和建筑的贬义词，暗示其品质与“野蛮”哥特人的作品一样．如今哥特时代指紧随罗马式之后的那段艺术和建筑时代．人们认为这是一段取得了杰出艺术成就的时期．

哥特式最容易辨别的特征是尖拱券，即哥特拱券．图3-16展示了一种常见的设计．取一条线段AB，分别以A和B为圆心，以线段的长度为半径画两条圆弧．保持圆心不变，增加弧的半径，即可画出拱券的外边界．如图3-17所示，作为结构装置，与半圆形拱券相比，哥特拱券有优点，也有缺点．若要横跨同一空间，哥特拱必须要更高一些．但在传递负载方面，哥特拱券有更小的水平分量和更大的垂直分量，这意味着哥特拱产生的向外的侧推力更小，因此更容易控制．垂直分量更大则意味着构建哥特拱券的材料受到更大的挤压．对于这一点，我们不用担心，因为石块、砖石和混凝土的耐挤压能力都很强．

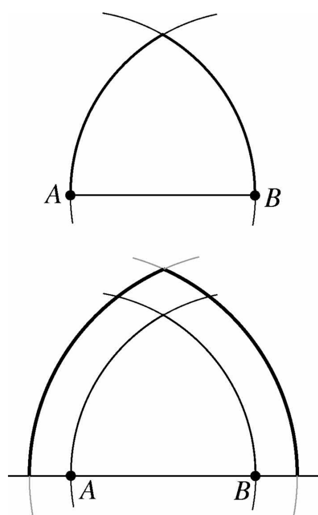


图**3-16**　哥特式拱券

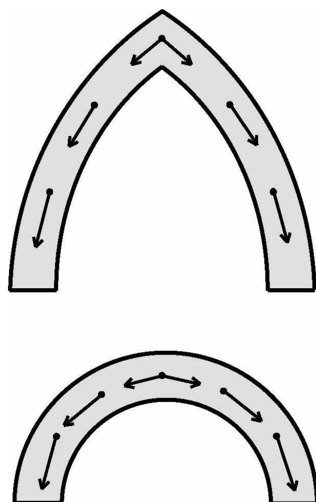


图**3-17**　力的比较

现在我们定量分析哥特拱产生的向外的推力．图3-18a是我们将分析的哥特拱券的简化模型．假设拱券支撑的总负载L作用在最顶部，该负载包括拱券的斜构件的重量．每一根斜构件都与水平面成α角．拱券的倾斜部分将负载向下传递．我们能计算或至少估计出它所产生的侧推力的水平分量H吗？我们将转而回答和它等价的问题．如果我们增加一个水平梁来加固该拱券，如图3-18(b)所示，要使拱券稳定，这根梁产生的拉力T必须是多少？这就是我们所寻求的水平力H．拉力P的求解将以上问题转换为之前章节中图3-14和图3-15的内容．应用前面的分析，可得

$$H=T=\frac{L}{2\tan\alpha}$$

例如，假设L=5000磅．令α分别等于30°、45°、60°和75°，计算H和拱券斜率的关系．因为 tan 30° = 0.58、 tan 45° = 1.00、 tan 60° = 1.73、 tan 75° = 3.73，相应的水平力H分别为4330磅、2500磅、1433磅和670磅．正如图3-17用定性方式已表明的，随着拱券坡度的增加，水平侧推力H明显减小．

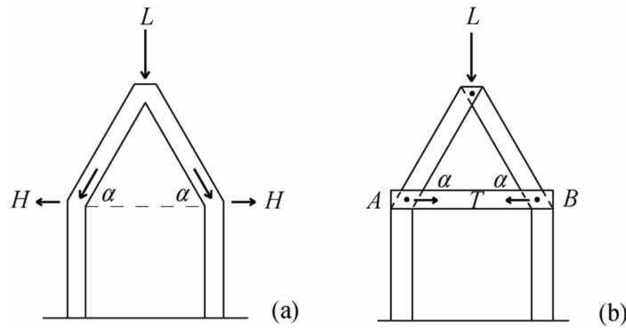


图**3-18**　拱券产生的水平侧推力

我们的研究也指出了结构构件所用材料的重要性．如果拱券如图3-18(b)所示这样紧密地结合在一起，则有可能仅靠它就可以限制由其所支撑的负载引起的向外的侧推力．由结实材料，如优质钢和钢筋混凝土，建成的拱券也能用同样的方式承担负载．但由石块、砖石和普通混凝土建成的拱券内阻较小，所以只有当负载产生的水平侧推力被对拱券侧边产生作用力的结构构件抵消后，这类拱券才能支撑大负载．

哥特式建筑最重要的结构部件是肋拱顶．为了理解肋拱顶，先分析彩图12中韦兹莱巴西利卡式天花板．它的中殿被分隔成隔间，每个隔间的天花板都是十字拱顶，它由两个圆柱形筒拱顶相交得到．这些筒拱顶每一个都被两根有条纹的半圆形拱所限定．仔细观看彩图12，注意每个十字拱顶的两个圆柱形表面都产生了两个交叉的圆弧．图3-19用虚线标出了它们．图3-20(a)是图3-19中十字拱顶重新调整方向后的抽象示意图．两个筒拱顶，一个用黑色表示，一个用灰色表示，它们彼此正交．两根加粗的虚线代表它们相交产生的圆弧．（图中的一条弧被画成了直线，这只是方向选择的结果．）现在按下面的方法修改图3-20(a)．将两个圆柱形表面每一个都用有尖锐哥特弧的曲面代替，以此作为垂直截面图．经过这一改变，图3-20(a)中两个筒拱顶边界处的半圆形弧被转换成图3-20(b)中的两对哥特弧．形成图3-20(a)中的分界线的半圆也被转换成哥特弧．到目前为止，只进行了很小的几何变换．现在践行哥特建筑师的珍贵理念：将两个交叉的哥特弧（此时它们只是几何曲线）建立成为与结构相关的承重的哥特式拱券．在边界上将哥特拱券结合，形成如图3-20(b)所示的连环拱肋网格．这一网格就是哥特肋拱顶的结构框架．

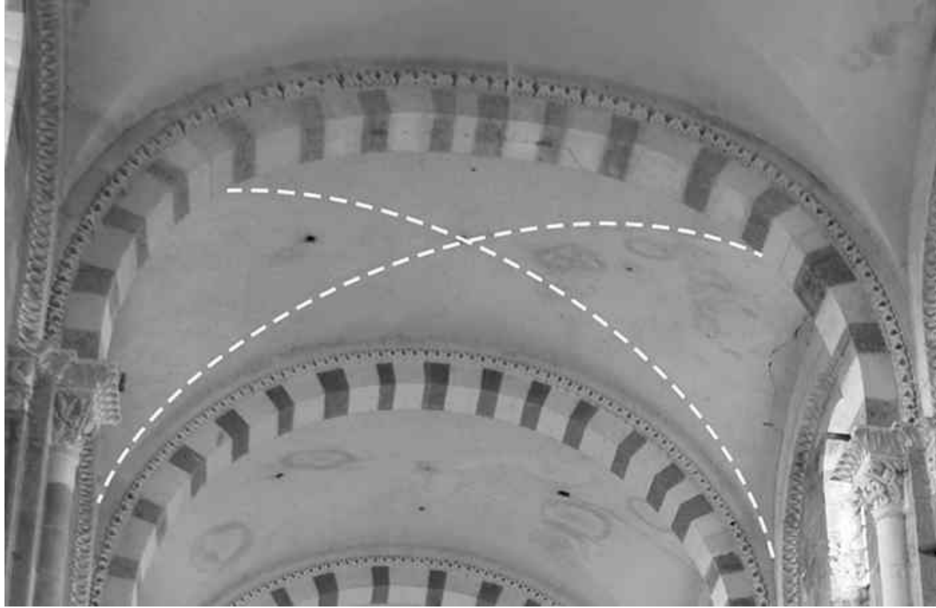


图**3-19**　韦兹莱的十字拱顶，**Vassil**摄

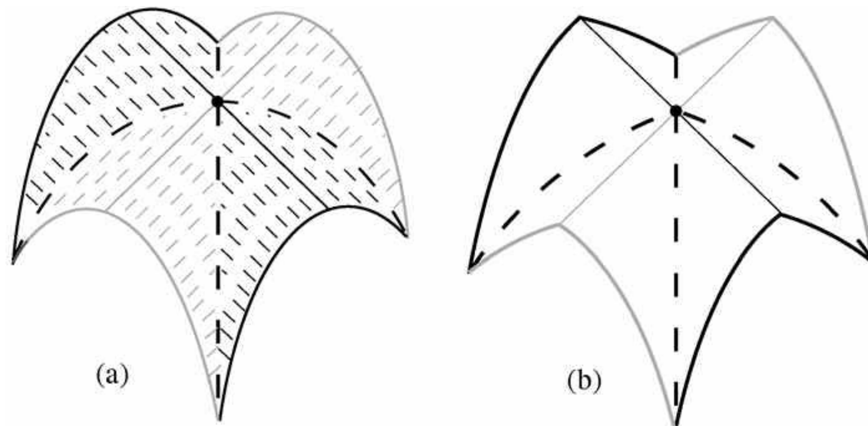


图**3-20**　从十字拱顶到哥特式肋拱顶

肋拱顶对哥特式建筑的发展至关重要．它给建筑人员提供了新的设计和施工的可能性，成为中世纪建筑的主流．在肋拱顶中，拱肋是基本的结构成员．拱肋之间的空间与结构的关系不大，可以用较薄的砌筑材料填充．这样肋拱顶会比更大型的筒拱顶及十字拱顶轻，因此结构上更有弹性．它也更容易建造，使许多建筑革新成为可能．建造拱顶需要用拱鹰架（一种临时的木结构，我们在2.5节的内容中已遇到过）支撑所砌筑的工程，直到穹顶的壳完工且抹好灰泥．在建造十字拱顶时，整个隔间的天花板也必须用这种方式来支撑．建造肋拱顶则要简单一些．建造人员将两个对角交叉的拱横在隔间上空，由高放在中殿墙上的轻型拱鹰架

支撑．作为肋拱连环网格的一部分，它将拱顶分成更小的三角形单元．图3-21展示了这样的一种布置．拱肋放好后，再把砖石或混凝土填充到这些三角形单元中．同样，这一过程不需要大型拱鹰架．



图**3-21**　哥特式教堂天花板内隔间上的肋拱顶，**Magali Ferate**摄

中殿和耳房天花板上拱肋的配置决定了哥特式教堂余下的结构措施．拱肋的汇聚点确定了顺中殿侧边向下的垂直支撑柱的安放位置，如图3-22所示．这些柱子朝下汇入更厚的墩柱中．最后一块要解决的结构谜题是拱形天花板尤其拱肋产生的向外的力．参见图3-14和图3-18以及对它们的讨论．由于这些侧推力均集中在拱肋的汇聚点，并沿支撑它们的柱子向下传递，所以可以用飞扶壁进行抵消．图3-23展示了这些半拱如何沿由拱顶的拱肋和支撑柱所确定的垂直压力线从外面推中殿墙壁．柱间墙壁与哥特式教堂的结构整体关系较小，这意味着可以在它们上面凿出大块面积来安装窗户．精心制作的彩色大玻璃窗经光线照射，产生梦幻一般的效果，这是哥特式建筑的典型特征．镶嵌这些窗玻璃板的精美石工艺被称为花饰窗格．图3-24的玫瑰花窗就是富于艺术气息的一个例子．



图**3-22**　三根汇聚于一点的拱肋及支撑柱，**BjörnT**摄

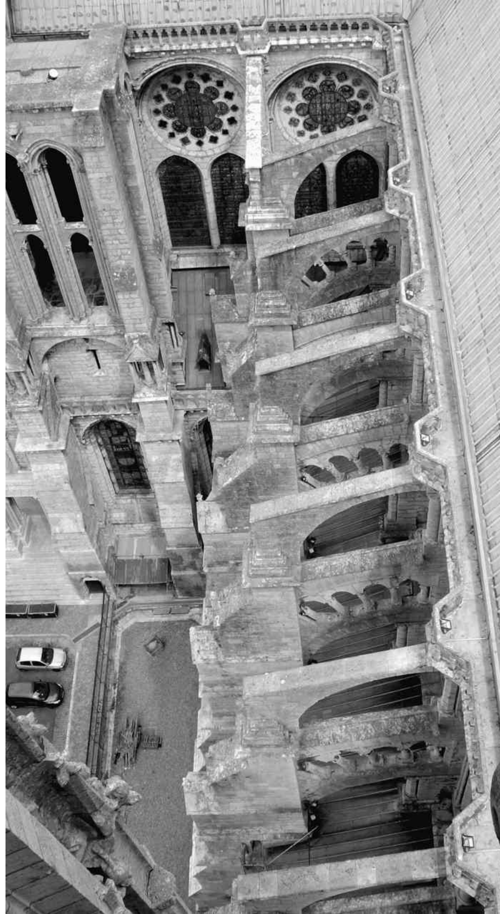


图**3-23**　一系列支撑对应拱肋和柱子的飞扶壁，**Harmonia Amanda**摄

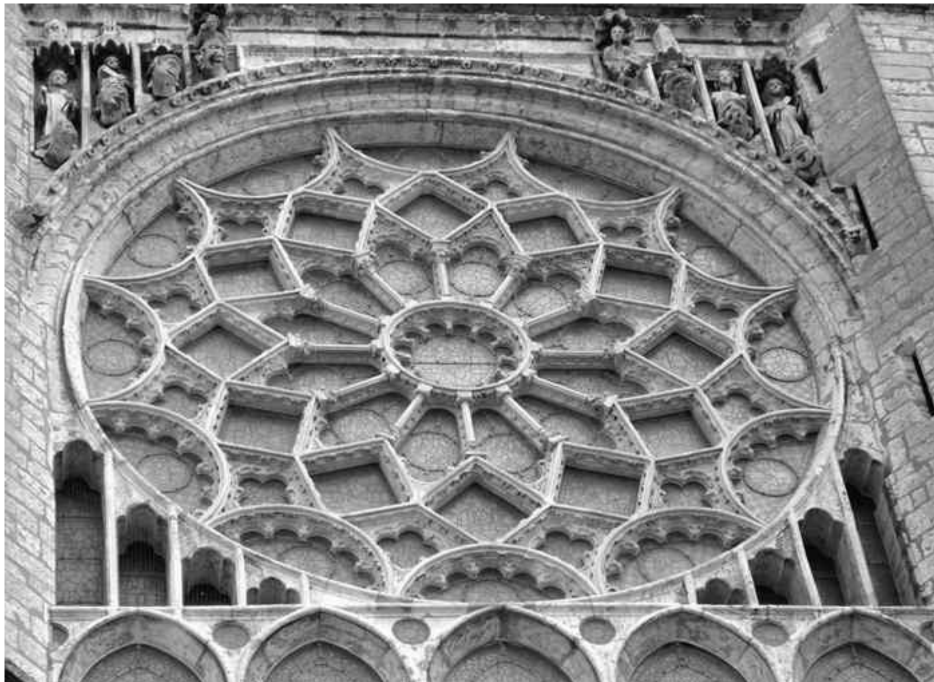


图**3-24**　大型玫瑰花窗，**Harmonia Amanda**摄

哥特式教堂的结构方案先从肋拱顶开始，按向下和向外的逻辑进行．肋拱顶使哥特主建筑师建造的教堂内部高高耸立，比更早、更坚固、规模更大的罗马式教堂要高，也更优雅和精美．

法国、英格兰、德国和澳大利亚建造了许多辉煌的哥特式教堂．建筑历史学家认为沙特尔镇的圣母院是最好的一座，它距离巴黎约50英里，是重要的朝圣中心．这座教堂从12世纪中叶开始建造，但该世纪末的一场大火烧毁了已建成的许多部分以及镇上的许多地方．人们花了25年（对哥特式教堂而言时间很短了）对它进行重建，到1220年完工．图3-21、图3-22、图3-23和图3-24中的肋拱顶、支撑柱、飞扶壁和玫瑰花窗都属于这座圣母院．彩图13展现了它的全貌．飞扶壁分布在中殿侧面及后殿周围．这一模式被耳堂打破，它由小塔而非飞扶壁支撑．入口处的尖塔作为墩柱，抵抗入口附近的拱顶所产生的压力．这两座尖塔差别很大．一座高约106米，可追溯到12世纪，是朴素的早期哥特式风格．另一座高约115米，建于16世纪，是法国的高哥特式风格．该教堂以其彩色玻璃窗著名，它们中许多都使用美丽的蓝色调，时间可追溯到13世纪．彩图14展现了从内部观看图3-24所示的玫瑰花窗的情形．就像设计繁复的彩色瓷砖是伊斯兰艺术的核心，精巧的金色圣像和马赛克是拜占庭艺术的标志一样，瑰丽的彩色玻璃窗也成为哥特时代艺术的典范．



彩图 **13**　沙特尔的圣母院．从南面看到的图片



彩图 **14**　沙特尔的圣母院北侧的玫瑰花窗细部．图 3-24 中展示玫瑰花窗受到照射后的内部．花窗是敬献给圣母的，直径为 10.5 米．MOSSOT 摄

我们已看到哥特式建筑本质上是在石头上进行的几何学．后面的讨论会告诉我们它是多么的正确．

3.5　建筑委员会年报的记录

米兰是意大利北部伦巴第州的州府，在一段不稳定的政治时期开始崭露头角，到14世纪后期获得了权力地位．它并吞了邻近意大利的国家大片领土，开始聚集财富．为彰显城市的新地位，新的教堂建设纳入规划中．首先在法国出现的哥特式传播到英格兰、德国和澳大利亚，哥特式在这里的许多高耸的大型教堂中得到了体现．在设计和规模方面，米兰的新教堂希望打造成这些建筑中最大、最让人难忘的一座．米兰的大公设立了一个建筑委员会来监督建筑过程．接下来发生的事都在《米兰大教堂建筑委员会年报》（*Annali della Fabbrica del Duomo di Milano*）中得到了披露．通常中世纪建筑的记录仅局限于供应跟踪、财务和雇佣关系，但建筑委员会的《年报》却提供了一种稀有、珍贵的视角，使人们了解规划工作、建筑过程以及中世纪解决设计和结构问题的方法．

建筑委员会的成员并没有经验，但却固执己见．委员会决定教堂应是巴西利卡式的，中殿两侧都有两座侧廊，并批准拱顶及其支撑墩柱的设计．《年报》记录了委员会的决定．图3-25(a)总结了其中的许多内容．它提供了拱顶的布局和形状、墩柱中轴线的位置以及墩柱的高度．《年报》以米兰布拉乔奥（一米兰布拉乔奥约等于1.95英尺）为单位列出了一些尺寸．图3-25(a)表明委员会的设计是建立在三角形主题的基础上，包括图中的虚线部分．例如，图3-25(a)中教堂内部的宽度应为 $96\times1.95\approx187$ 英尺，中殿上方主拱顶离地的高度应为 $84\times1.95\approx164$ 英尺，支撑它的墩柱高度应为 $56\times1.95\approx109$ 英尺．决定这种设计的5个三角形（其底边在图的底部）是等腰三角形，且彼此相似（这是由于它们对应边的斜率都为$\frac{28}{16}$）．它们几乎是等边三角形．例如考虑底边b=32、高h=28的三角形．图3-25(b)表明它的边$s=\sqrt{16^2+28^2}=\sqrt{1040}\approx32.25\approx b$．这一计算也告诉我们，所设计的穹顶的横截面图接近于图3-16中的规定．

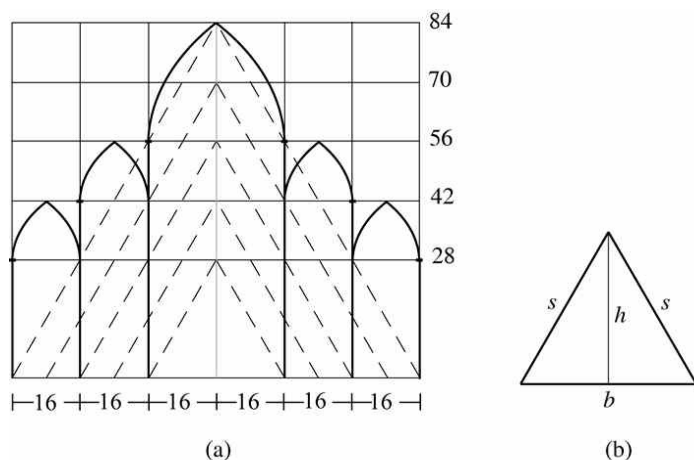


图　**3-25**

教堂于1386年破土动工，到14世纪90年代，已打好地基，开始建造墩柱．但随着墩柱高度的增加，地基的问题显现出来．委员会决定停止施工，重新审查教堂的规划．他们邀请德国的一名哥特式主建筑师作为顾问．原本确定的墩柱高度、中殿和侧廊规模、拱顶高度以及扶壁结构布局都受到严格的审查．德国专家强烈关注已建造部分的结构稳定性，尤其是墩柱和外扶壁．他建议拱顶的高度应与阿尔卑斯山以北的哥特式大教堂一致．他坚持应该遵循正方形而不是三角形几何学，尤其主拱顶应从84布拉乔奥升至96布拉乔奥，从而和内部96布拉乔奥的宽度相匹配．建筑委员会召开了一个大型的讨论会来讨论德国专家的建议．《年报》用问答的形式总结了这次讨论及其结果，共有11组问答．问题部分使我们了解了德国专家提出的观点．回答部分告诉我们委员会关于此问题的最终决定．最重要的交流包括如下内容：

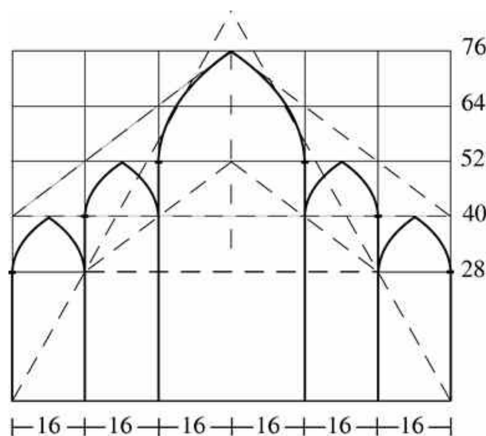
> Q：教堂后部及侧面和内部，即十字交叉处及其他部分，或至少说墩柱是否具有足够的强度？
>
> A：这些已被考虑过，回答过，并且凭灵魂和良心作出陈述，即对上述强度而言，不管是整体还是单独构件，都足够支撑其结构甚至更多结构．
>
> Q：外墩柱或扶壁的工作是像开始那样继续下去，还是用其他方法作出改进？
>
> A：据说这一工作让人满意，什么都不需要改动，相反，工作应继续进行．

> Q：不把将要建造的塔的尺寸考虑在内的话，这座教堂是否应根据正方形或三角形来增加高度？
>
> A：前面已经表示过它应该上升为一个三角形，并且不再增加高度.

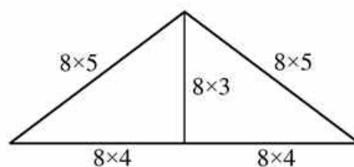
记录显示德国主建筑师的所有提议都被拒绝了．他对墩柱强度的考虑得到了诉诸“灵魂和良心”的回应．对外扶壁则“什么都不需要改动”．教堂应“上升为一个三角形”，正方形即中殿上方的拱顶高度应与内部宽度相匹配的观点也被驳回．实际上，委员会通过降低早期设计的内部结构部件来回应几个关于墩柱高度的问题．支撑外侧廊上方拱顶的墩柱高度保留了28布拉乔奥，但所有的拱顶和内部墩柱都变低了．图3-26(a)给出了修改后的墩柱和拱顶高度．该图中心处的虚线三角形给出了内侧廊上方穹顶的高度和支撑中殿上方拱顶的墩柱高度．这个虚线三角形的高度为52-28=24布拉乔奥，底边为4×15 = 64 布拉乔奥．因为 24 = 8×3、 32 = 8×4 且

$$\sqrt{24^2+32^2}=\sqrt{8^2\times 3^2+8^2\times 4^2}=8\times\sqrt{3^2+4^2}=8\times 5$$

可知这个三角形是由两个边长为3、4、5的直角三角形靠在一起得到的，如图3-26(b)所示．延伸到图3-26(a)顶部的较大的虚线三角形确定了中殿上方拱顶的高度．很容易验证它也是两个边长为3、4、5的直角三角形的和．在降低教堂内部拱顶和墩柱的高度时，委员会摈弃了图3-25(a)中的等边三角形几何形状，代之以图3-26(a)中的边长为3、4、5的直角三角形．这一观念获得了胜利，图3-26(a)列出的墩柱和穹顶高度接近于教堂建成时的尺寸.



(a)



(b)

图　**3-26**

建筑委员会作出的裁定展示了对教堂外形的一种看法，即它应比早期的法国、英国和德国的哥特式教堂高耸的外形要低矮和宽广一些．委员会的想法是如果中殿够矮，内侧廊够高，则中殿的拱顶能得到墙和每侧侧廊拱顶的足够支持．而这些部件又会受到外侧廊结构的支持，这样就完全或几乎不需要飞扶壁了．

委员会辞退了德国主建筑师，不久又辞退了另一个．几年后，墩柱建成，但关于拱顶的最后决定被推迟了．尽管教堂设计的关键问题尚未解决，但施工仍在继续进行．委员会不满意早期德国人的建议，转而寻求法国专家的意见．三个法国专家中有两个觉察出他们的参与无足轻重，很快就离开了．第三个还是对结构作出警告，并提出诸多批评．他认为在十字交叉处上方建造的塔楼不可行，因为其支撑力不够．而后殿的结构，尤其是墩柱、地基以及扶壁太脆弱，不能支撑塔楼和拱顶的侧推力．他坚持这些结构需要有更大的强度．他还确信围绕教堂外边界的扶壁太不结实．他建议其宽度应加倍，推荐外扶壁与墩柱厚度之比为3∶1，而非如委员会所规定的1.5∶1．他还就沿中殿分布的墩柱高度与其顶端柱头高度的关系提出了一种美学观点．这些柱头的设计高度超出了当时传统上所要求的高度．（图3-28的上方是对这些墩柱和柱头进行的研究．）

历史又将重演．《年报》记录建筑委员会拒绝了法国主建筑师的提议．委员会对他提出的每个观点都作出回应．专家和“官方誓言”都确信教堂的地基（它深入地下14布拉乔奥）是稳固的．墩柱内部是坚固的石头，并用铅铁钉加固过．为获得更多支撑，会把粗铁杆捆在柱头上，将它们连接在一起．委员会声称扶壁所用的米兰石头和大理石强度是法国石头的两倍，因此扶壁的设计恰当无误，甚至能承载更大的重量．结论是教堂的任何部分都不需要增加扶壁．为了彻底为现有的设计辩护，委员会转到拱顶上，让人非常难以置信地声称它们已经被确定为“尖拱顶，这是其他许多优秀专业的工程师所建议的类型，因为他们考虑到尖拱不会给扶壁施加侧推力”．

委员会只是熟悉并拒绝了德国和法国哥特式主建筑师对结构稳定性的不断警告．施工继续进行．教堂的主祭坛在1418年落成，但延误的形势依然持续． 15世纪80年代，对所设计的拱顶和十字交叉处上方塔楼的新关注不断产生．一如既往，专家的建议又被忽略（甚至如我们将在第5章所见到的莱昂纳多·达芬奇的意见）．除了施工的巨大花费，伦巴第

州动荡的政治和金融状况也造成了大的延误．教堂直到1572年才完工．图3-27和图3-28的研究证实，最终的设计结合了等边三角形和边长为3、4、5的直角三角形．除了拱顶和墩柱，这些研究还包括了对耳堂和十字交叉处上方塔楼的设计．屋顶上方的小尖顶起到结构作用．这些尖顶的重量增加了以其为顶部的柱子和墩柱的刚度．图3-29、图3-30和图3-31描绘了米兰大教堂如今的样子．墩柱、扶壁、墙和外部窗户上精巧密集的大理石装饰是19世纪的作品．

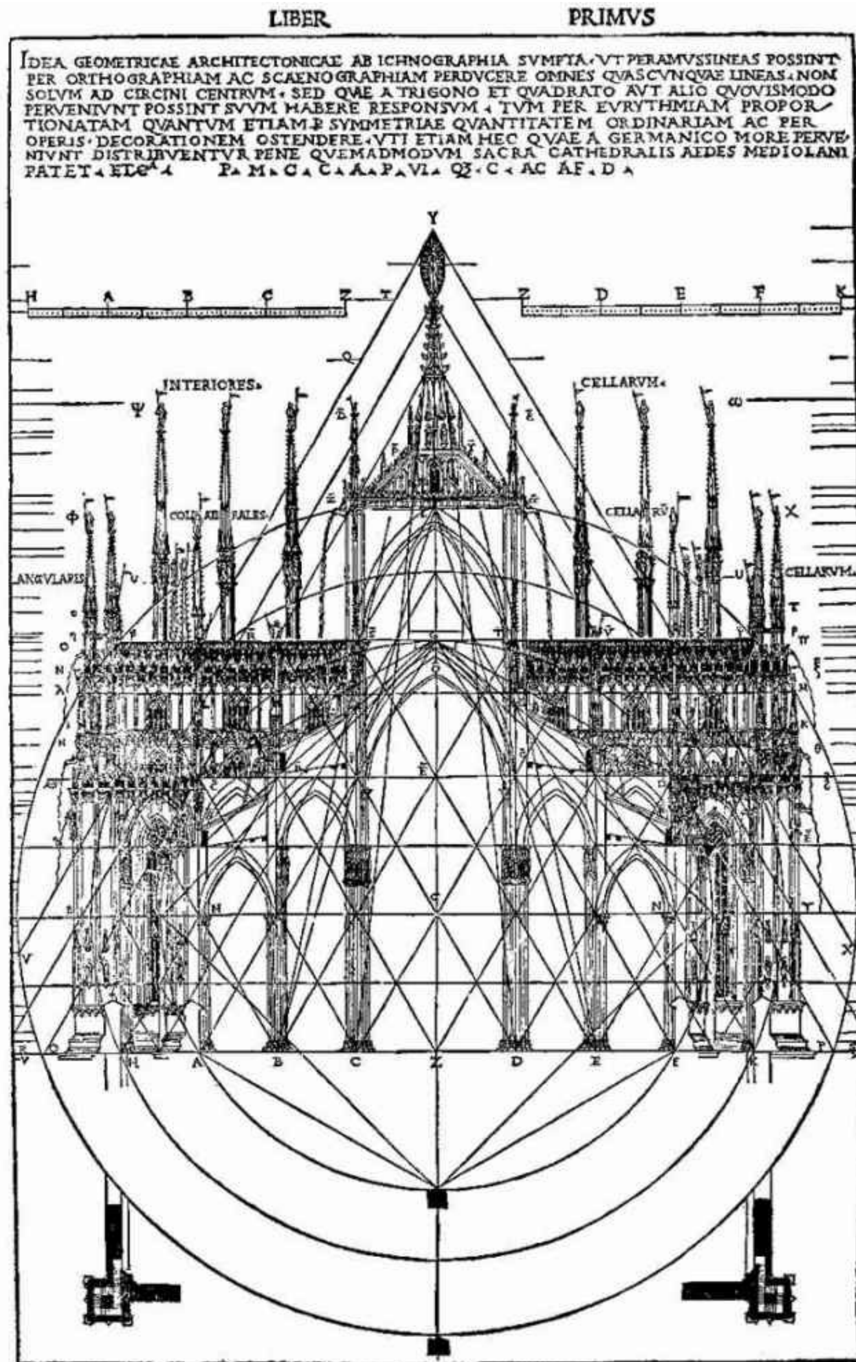


图**3-27**　米兰大教堂的截面图，包括墩柱、中殿和侧廊上空的拱顶、十字交叉处塔楼的拱顶和耳堂．选自切萨雷·切萨利亚诺翻译的意大利版维特鲁威的《建筑十书》（***De Architectura***），出版地为科摩，**1521**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室，**Barr Farre** 收藏

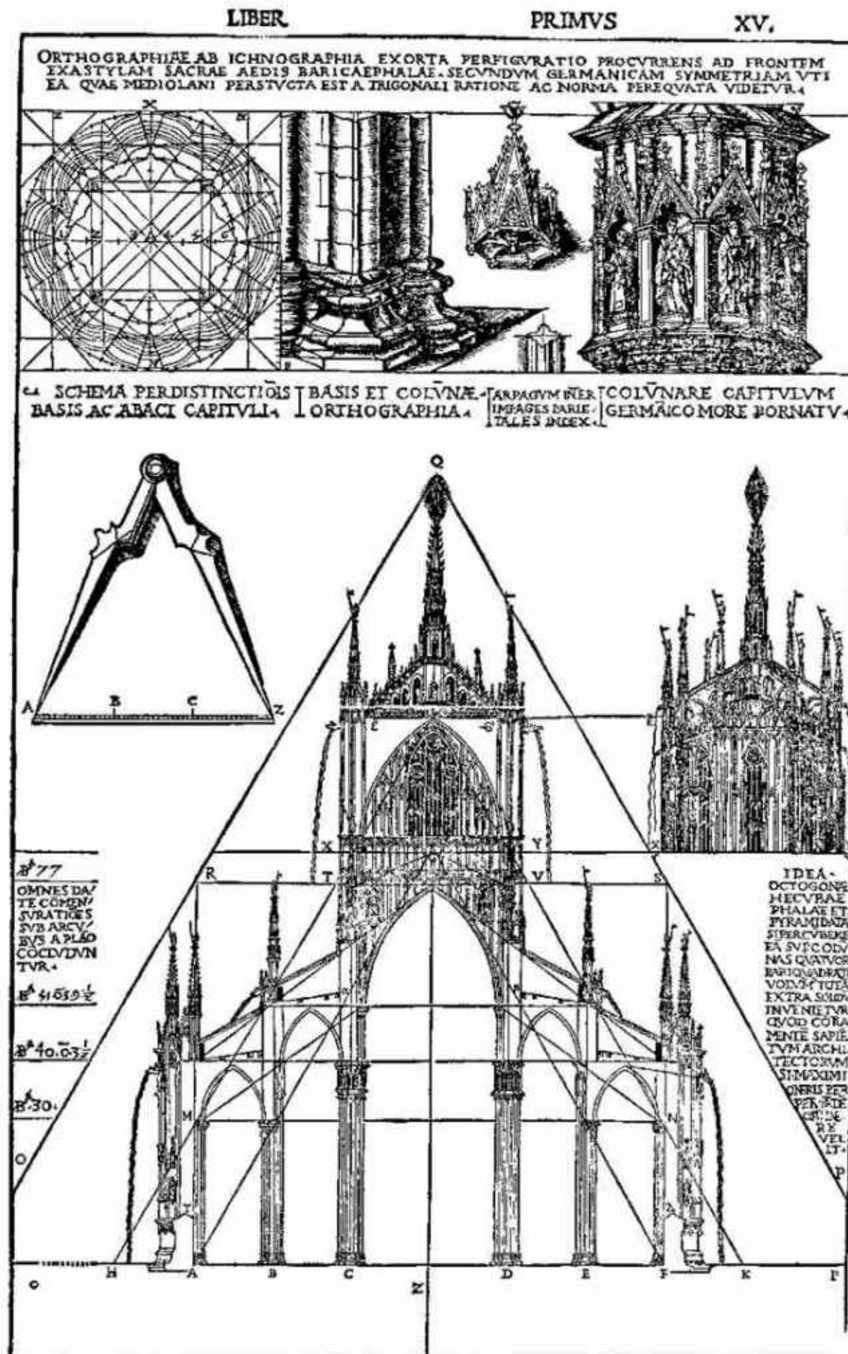


图**3-28**　米兰大教堂的截面图，其结构部件的细节，选自切萨雷·切萨利亚诺翻译的意大利版维特鲁威的《建筑十书》（***De Architectura***），出版地为科摩，**1521**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室，**Barr Farre** 收藏



图**3-29**　米兰大教堂中殿的一些主墩柱及其柱头、铁杆和哥特式拱顶，**Giovanni Dall'Orto**摄



图**3-30**　米兰大教堂的三角形哥特式正面及其尖塔状扶壁，**Skarkkai**摄



图**3-31**　米兰大教堂外观，包括后殿、耳堂、十字交叉处上方的塔楼．**Fabio Alessandro Locati**摄

意料之中的是，石匠大师领导建造了哥特时代的这一座伟大的石头作品．他们监督石头的开采，指导石块的切割和加工．他们还指挥升降机和起重机将沉重的石块和砌筑材料吊起并放到施工现场的合适位置．（讨论3.3将进一步研究这些内容．）《米兰大教堂建筑委员会年报》（*Annals of the Building Council of the Cathedral of Milan*）让我们知道了建筑艺术，尤其是石匠大师的经验和技能的重要性以及石头强度和砖石建筑的相关性．但《年报》也告诉我们，建筑艺术必须受精确的科学原理的指导．不过这与如今所谓的结构工程无关．人们普遍感觉负载和侧推力有关，还了解一些结构部件间相对厚度的经验法则．但是在哥特式建筑师和建筑委员会的争论中，没有任何一方能就米兰大教堂结构中的任一构件的可靠性提供合理的论证．即使如之前3.3节中已展现的那些对侧推力的粗略估计，也完全超出他们的概念范围．那么是什么样的科学指导着哥特式建筑师？那时唯一可利用的科学是几何学．实际上，几何学不仅是一门科学，还是一种神圣活动．彩图15中上帝的圆规是其创

造活动的象征．上帝遵循几何学及和谐原则创造了世界．他是伟大的几何学家，中世纪的主建筑师追随他的领导．他们用简单的几何学及相关的数值关系来确定相关结构部件的尺寸，包括墩柱、墙壁和拱顶的宽度、高度和间距．几何学不仅告知尺寸，也确定结构．哥特式建筑要稳固，其设计必须遵循整体几何学和数值方案．结构相关构件的配置需要与整体的几何学方案一致．哥特式结构的概念取决于几何学和数值关系，而非对负载、侧推力和应力的考虑．



彩图 **15**　作为几何学家的上帝．维也纳道德圣经的扉页插图，

Vindobonensis 抄本 2554（法语，约 1250 年），维也纳奥地利国家图书馆．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

米兰大教堂证明了上述内容．图3-25(a)、图3-26(a)、图3-27和图3-28对三角形方案作出了说明，该方案确定了重要结构构件的尺寸和位置以及它们的连接方式．中殿沿线的主墩柱每根都宽4布拉乔奥．4布拉乔奥的宽度决定其柱础高度为2布拉乔奥．主墩柱的柱础和柱头的关系为1∶4．因此它的柱头高8布拉乔奥．主墩柱的宽度为4布拉乔奥，与相邻的主墩柱间的距离为12布拉乔奥，它们之间的关系是1∶3．两根墩柱柱心间的距离为16布拉乔奥．中殿的宽度是它的两倍，为32布拉乔奥．对正方形的期望决定主墩柱的柱身（指不包括柱头的墩柱）长度也是32布拉乔奥．外侧廊上方拱顶高为40布拉乔奥高，与主墩柱的高度相等．因此我们看到该结构基本构件的尺寸由一系列数值比给出，这些比可依据它们与整体方案的几何关联性得到．最后，正是数字关系网证明了结构的稳定性．

如果提出两种不同的几何标准会怎样？一种标准是怎样比另一种更受欢迎的？这样的问题要利用传统的建筑实践和石匠的专业知识来解决．垂直几何图形（究竟是等边三角形还是边长为3、4、5的直角三角形）就是这样决定的．建筑委员会和法国主建筑师对墩柱与扶壁厚度的恰当比例意见不统一（究竟是1∶3，还是1∶1.5）时，也是这样解决的．就是用这种方式，结构得以发展，并成为实际知识（也就是艺术）和几何形式（也就是科学之间）的一种折中．

我们再回到哥特式专家和建筑委员会之间的争辩．历史宣判哪一边获胜？尽管哥特式专家的观点更有可取之处，但决定性的证据更支持委员会．事实上，根据委员会决定建造的大教堂至今仍然屹立不倒．不稳固的地基、不结实的墩柱、不充足的扶壁、有“不施加侧推力的尖拱”的拱顶已存在了5个世纪．主墩柱不合比例的柱头及其装饰性的壁龛和圣像如图3-28和图3-29所示，已成为这座教堂的显著特征．不过委员会想要避免的飞扶壁在19世纪晚期得到增加．考虑它的新颖设计，教堂的施工已成为一次重大试验．《年报》的记录告诉我们它的成功更多靠运气，而非委员会内建筑者和专家的技能和知识．值得注意的是，哥特式石匠大师（正如他们之前的埃及、希腊和罗马建筑人员）能完成那个时代让人惊讶的结构，尽管他们的施工方法很有限，而且缺少对负载和侧推力的理解．

3.6 威尼斯和比萨的魅力

公元10世纪，战略上属于地中海地区的威尼斯和比萨城邦的贸易逐渐繁荣起来，它们将欧洲王国与拜占庭和伊斯兰世界联系起来．这些城市的商人用船运载并买卖木材、毛皮、羊毛、金属、粮食、衣物、香料和丝绸，变得富裕并具有影响力．同时，思想也沿贸易路线得以交流，而这些城市的建筑会受到拜占庭和伊斯兰形式的影响也就不足为奇了．

威尼斯建筑最突出、最重要的两个范例是圣马可教堂和作为威尼斯大公住宅的道奇宫．（道奇是大公的意大利语威尼斯方言，源自拉丁词dux，意为“领袖”．）圣马可教堂在1063年到1089年按拜占庭式完全重建．新教堂上方有5个穹顶，一个大的中心穹顶由其他4个十字形分布的穹顶环绕．穹顶由砖砌成，由巨大的拱券、拱顶和墩柱支撑．每个穹顶的外形都比较低矮，基部有排成圆形的窗子，是圣索菲亚大教堂穹顶的缩小版．砖和红陶是这座教堂的主要建筑材料．由于装饰部件也是如此，这座教堂本应给人一种即便不是刻板也是朴素的印象．但在13世纪，它开始发生戏剧性的变化．在威尼斯共和国领导十字军东征时期，君士坦丁堡受到洗劫，许多艺术品被带走．十字军东征的掠夺物使圣马可教堂的内部得以改头换面．坚硬的砖表面为图3-32中奢侈的金马赛克、耀眼的大理石镶嵌和富丽的装饰所代替．



图**3-32**　卡纳莱托，圣马可教堂内部，约**1755**年．布面油画．皇家收藏，版权归仁慈的伊丽莎白二世女王陛下所有

圣马可教堂外部也发生了变化．图3-33描绘了从教堂前广场上的有利位置看到的新立面．立面的顶部被加上了伊斯兰的洋葱形拱券，这是一种先向内弯曲，高度增加时再向外弯曲的拱券．这些洋葱形拱券中最大的一个高耸在中心入口的上面，内置4个从君士坦丁堡抢来的引人注目的铜马．其他的4个洋葱形拱券罩在布满华丽马赛克的半圆形板上．彩图16给出了富丽的正面一瞥．人们通过增加柱子和矩形面板，给立面低处的5个错落的高拱形结构增添了装饰性细节．



图**3-33**　圣马可广场．选自托马斯罗斯科的《意大利旅游》（***The Tourist in Italy***），插图由**Samuel Prout**绘制，伦敦，**1831**



彩图 **16**　威尼斯圣马可大教堂的正面及穹顶，Andreas Volkmer 摄

不过最引人注目的改变是教堂的5个低矮的拜占庭穹顶．它们每一个顶部都罩上了一个高耸鼓出的外壳．这些壳由固定在原穹顶上的木梁结构所支撑．人们在上面铺上铅板，再给它盖上洋葱形的采光亭．这些穹顶弯曲的几何形状使教堂的新外形呈现出异域风情．图3-33和彩图16描绘了这些新的穹顶，与它们现在的外形相同．图3-34让我们看到了内部结构的样子．它展示了3个原来穹顶（图中用黑色加粗表示）的截面图以及支撑其外壳的木结构．让这些穹顶具有壮观的新外形以抬高它们的想法可能是来自图3-7所描绘的岩石穹顶清真寺．它还有可能受到伊斯兰教历史上著名的清真寺——大马士革大清真寺的报告的启发．1184年，一位来自伊斯兰西班牙的参观者描述了这座清真寺的中央穹顶结构，内容如下：

> 然后我们赶紧进入穹顶内部，经过……大木梁板，它们都铺在位于外部浅灰色穹顶内部的较小穹顶上，……这儿有两个拱形窗户，透过它们你能俯瞰下面的清真寺……这座穹顶是圆形的，就像一个球，其结构用木板建成，由结实的木头拱肋进行加固，并由铁条箍紧．拱肋沿

> 着穹顶弯曲，在木圆圈的顶点处交会．从清真寺内部可以看到，其内部穹顶镶嵌着木板．它们都是镀金的，华丽无比，用各种色彩和雕刻加以装饰．大的铅灰色穹顶遮住了刚才描写的这个内部穹顶，它也由箍着铁条的木拱肋加固．这些拱肋共48根，每根拱肋间距4个跨距．拱肋在上方会聚，统一到位于中心的一块木头内．大的铅灰色穹顶坐落在一个圆形基座上．

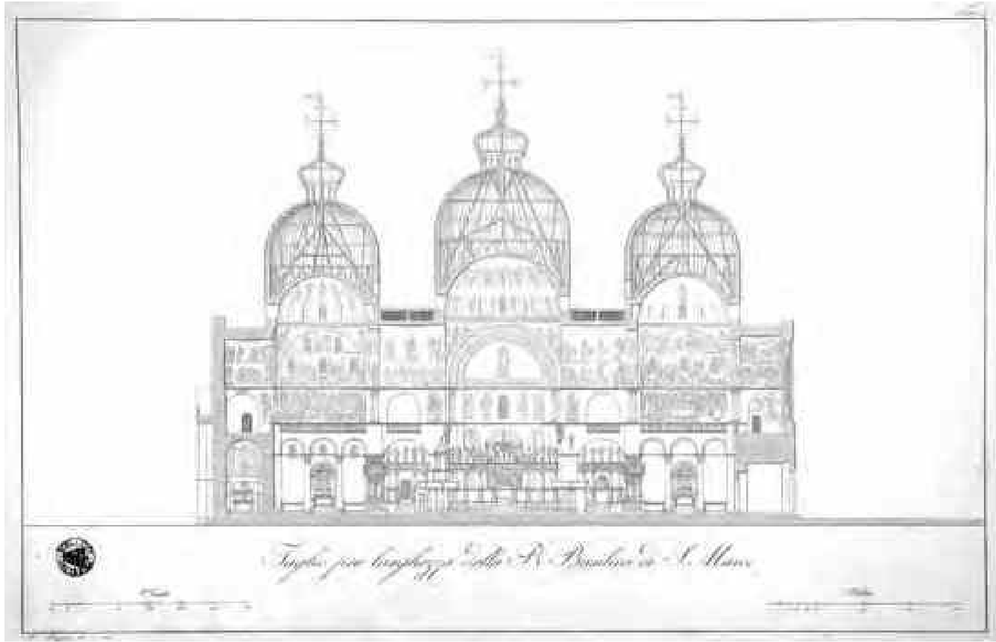


图**3-34**　圣马可大教堂，南北截面图．选自**L. Cicognara**、**A. Diedo**和**G. Selva**的《威尼斯的著名工厂和古迹》（***Le fabbriche ei monumenti conspicue di Venezia***），卷**1**，威尼斯，**1838**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室，由**Allan Marquant**博士提供

考虑到这个时期大马士革与威尼斯之间繁荣的商贸活动，这类报告无疑会传播到威尼斯．

日益强大的统治者和日益有钱的商人开始兴建豪华的宫殿和住所．道奇宫建于1309~1424年，其正面如图3-35所示．这座宫殿作为大公的住所，是威尼斯的政治和法律中心．其设计包含了不同的元素．正面上部拱廊的洋葱形拱券具有伊斯兰特点，与科尔多瓦大清真寺的三叶拱券相似，参见彩图9和图3-10．粉红和白色的石头交替镶嵌，形成菱形图案，增加了正面大片平坦表面的活力，具有伊斯兰教风格．图3-36中精美的花饰窗格让人想起图3-24中沙特尔大教堂窗户上的花饰．窗户左右两边的雕像也是典型的哥特式．（窗花下方带翅膀的狮子是威尼斯共和

国的象征．）最后，有拱廊的开放性宫殿是文艺复兴建筑的先声．（文艺复兴建筑将在第5章讲述．）



图**3-35**　威尼斯道奇宫的正面，**Benjamin Sattin**摄

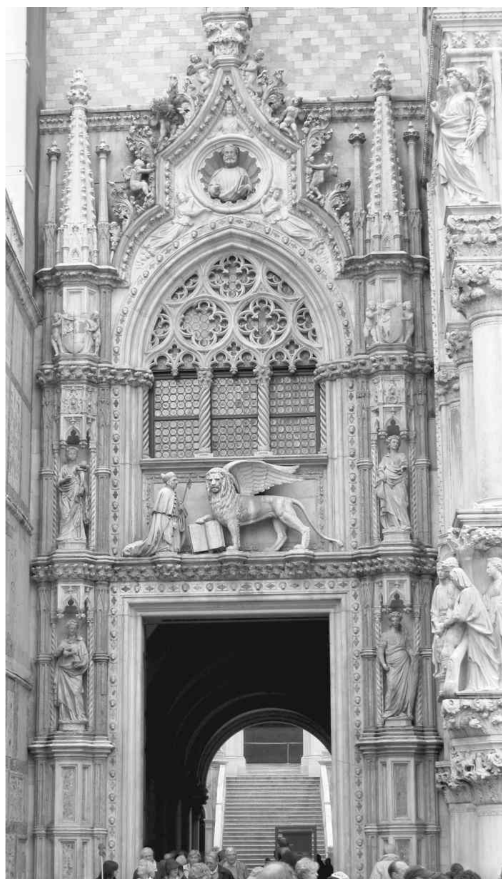


图**3-36**　威尼斯道奇宫正面细部，**Deror Avi**摄

使贸易在地中海地区往返进行的路线也将拜占庭和伊斯兰教的影响带到了比萨城．比萨大教堂于1063年开始规划，在1118年大体完工．它的布局基本为巴西利卡式，是意大利境内罗马式建筑的最佳代表之一，其内部明显受拜占庭的影响，描绘耶稣救世主的拜占庭马赛克占据了主祭坛后面的主要位置．它和彩图6中的马赛克很像，但艺术价值较小．除此之外，这座教堂的中殿每侧都有两层拱廊，令人想起圣索菲亚大教堂内部类似的特征．上面两层中的一层如图3-37所示．该图还表明，支承墙、拱券和在4角处的突角拱一起给十字交叉处上方的矩形空间盖上了拱顶．突角拱让人想起早期的伊斯兰先例．图3-38展示了这些结构所支撑的细长的八边形鼓座和穹顶．穹顶外侧基座周围的尖拱拱廊是后期建造的．



图**3-37**　比萨大教堂中支撑拱顶和穹顶的拱券和突角拱，**JoJan**摄

在欧洲其他地区建造高耸却刻板的哥特式杰作期间，威尼斯和比萨的艺术家和建筑人员却将拜占庭和伊斯兰概念与罗马式和哥特式风格相结合，创造出奇妙的新建筑.

我们最后将补充两条，来更新威尼斯和比萨的故事．威尼斯坐落在一座泻湖环绕的岛上．这一背景增加了它的魅力，但却威胁到它的生存．该岛的下层土始终不牢固，因此这座城市需要建在许多垂直竖立的木桩上．如今这些基础中有的地方已经损坏．经常发生的洪水使问题更加恶化．拯救威尼斯的工作已经进行了好几年．最近的工作是建造一座大型水闸系统．比萨面临的问题要小一些．教堂的钟塔在1175年破土动工后不久就开始倾斜．建筑师没能保证松软潮湿的土壤内钟塔地基的安全．继续施工时，人们通过建造更高的楼层来校正这种倾斜．结果到1350年完工时，它的高度已达约56米，从倾斜的方向向着垂直面往上轻微弯曲（这样它就具有了像香蕉一样的曲线）．尽管进行了校正，几个世纪以来，倾斜仍旧慢慢增加，钟塔开始以“比萨斜塔”闻名于世．1990年，钟塔与垂直面的倾斜度约达到5.5°，它被关闭并进行了校正．人们用钢铁加固钟塔的最底层，将600吨铅灌进倾斜面相对一侧的地基里．这一措

施好像能稳定该塔.



图**3-38**　比萨大教堂及比萨斜塔，**Marilyn Holland**摄

3.7 问题和讨论

第一组问题用定性和定量的方法分析负载和侧推力．接下来的3个讨论处理与本章所关心的内容有关的话题．【在几个问题里你会得到一些数值数据．你将需要确定有多少个数字是可靠的，这样接下来你才能相应地得出最后的答案．】

问题**1**　要计算圣索菲亚大教堂的穹顶所产生的负载，先要估计穹顶壳的体积及建造它所使用的材料的密度．如果把这一计算方法用在罗马万神殿的穹顶中，会遇到什么困难？

问题**2**　复习完环向应力现象（见2.7节）和圣索菲亚大教堂穹顶的设计与几何学后，评估其结构稳定性．

图3-39绘出了一张穹顶壳的垂直截面图，它与圣索菲亚大教堂开有40个窗户的拱廊上方的穹顶很相似．壳的内外边界在同心球上．在图3-39(a)中，C为两个球的公共球心，r是内球的半径，θ为决定壳范围的角度．穹顶的水平圆形底部及其中心见图3-39(b)．圆形底部半径为b，它到壳内侧顶部的距离为a．假设图中的壳像圣索菲亚大教堂的那样有一个拱肋结构，向量P表示相对的两对拱肋对壳底部的推力．

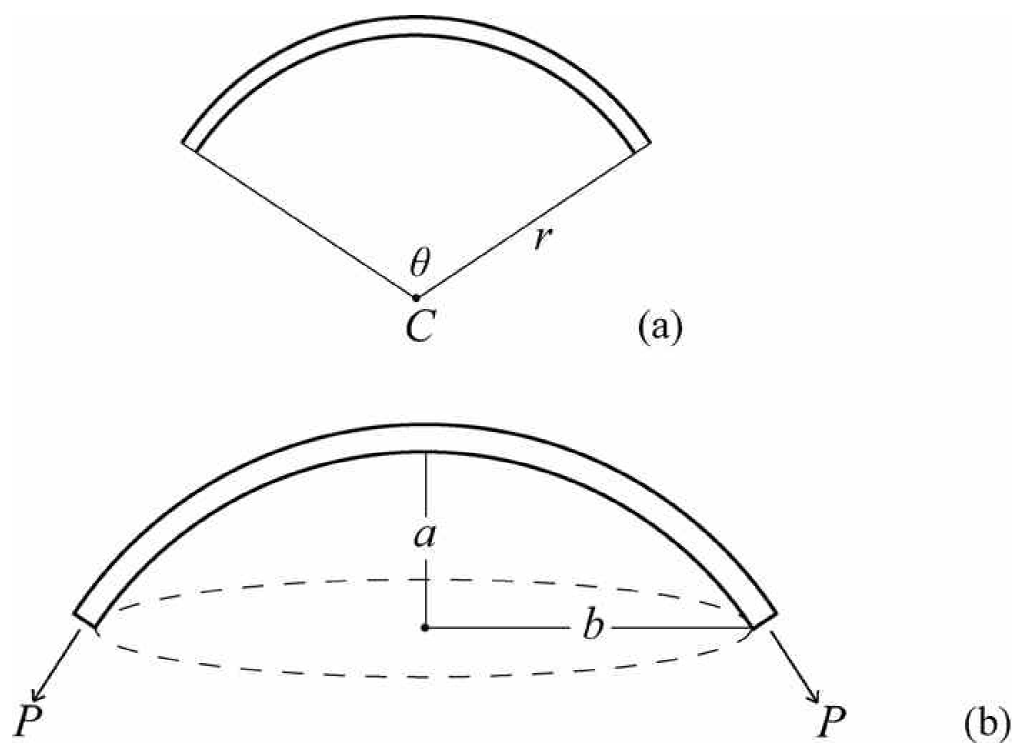


图　**3-39**

问题**3**　回忆圣索菲亚大教堂的穹顶，其中r=50英尺，$\theta = 140°$．推出b=47英尺，a=33英尺．

圣索菲亚大教堂完工后不久，受地震影响，原来的穹顶部分坍塌，后来穹顶得到重建．对于原来的穹顶，人们所知似乎不多，仅知道它比重建后的要低矮和扁平一些．不过假设原来穹顶的基础结构与重建后的相同，有可能猜出许多结论．这些在下面的问题4和问题5中会提出．假设对于原来的穹顶，图3-39给出了其基本结构，其圆形底部的大小与重建后的穹顶相同，且有40根拱肋组成的拱肋结构．考虑到问题3的结果，我们取原来穹顶的圆形底部的半径为b=47英尺，假设从该圆形底部到壳内侧顶部的距离为$a = 23$英尺，比重建后的穹顶矮10英尺．原来的穹顶扁平一些意味着图3-39中的内半径r应更大．

问题**4**　考虑已作出的假设，证明圣索菲亚大教堂原来的穹顶r=60英尺，$\theta = 140°$，二者均为估值．【提示：用毕达哥拉斯定理计算r．注意$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{b}{r}$．】

已知圣索菲亚大教堂穹顶壳厚2.5英尺，则有可能推出其体积约为27 600立方英尺．该体积的计算将在7.2节中给出．假设原来壳的厚度也为2.5英尺．利用问题4的结果和类似的体积计算方法可得出原来壳的体积约为23 300立方英尺．

问题**5**　假设原来壳的砌筑材料重量为100磅每立方英尺，与重建的壳相等．可 得原来的壳的重量约为2 560 000磅．参见3.1节，可推出一根拱肋对原来穹顶底部的推力$P \approx 81\ 000$ 磅，P的水平分量$H \approx 50\ 000$ 磅．将这些估计值与重建穹顶的对应值相比较，讨论其中的差别．

重要的是，应注意到与之前3.1节相同，上述研究潜在的基本假设是图3-39(b)中所展示的相对的一对拱肋及其携带的负载都可以由图3-14中的简单桁架建模，并且可以用3.3节中的方法分析．

问题**6**　假设图3-14中的桁架是哥特式教堂拱顶中的一根拱肋的抽象模型．教堂中的哪个结构起到连接AB两点的系梁的作用？假设负载L为10 000磅．取 $\alpha = 25°$、 $\alpha = 50°$及 $\alpha = 75°$，计算每种情况下斜梁在A点或B点产生的向外的侧推力的水平分量．

问题**7**　回到图3-14，考虑作用在点C处的力．给定负载L和角 α，用图3-40的受力分析计算作用在C点的向上的推力P及其水平分量H.

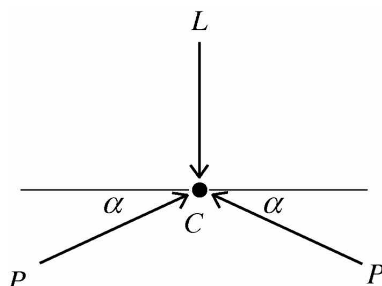


图　**3-40**

问题**8**　假设图3-41中拱上的负载L只包含两根斜梁的总重量．令 α 为给定的角，d为拱的跨距的一半，h为高，l为拱的斜梁长度．令w为这些部件单位长度的重量．解释为何 $L \approx 2w\sqrt{d^2+h^2}$ ．令H是负载产生的水平侧推力，证明 $H \approx wd\sqrt{1+\frac{d^2}{h^2}}$ ．现令w和d固定，讨论L和H如何随h变化．

问题**9**　根据问题8的结论，讨论沙特尔大教堂的尖顶产生的向外的力.

问题**10**　查阅法国博韦哥特式大教堂的历史，写出其结构失败的性质和原因.

讨论**3.1**　对称的数学　西班牙安达卢西亚地区格拉纳达内的阿罕布拉宫建于13至14世纪，是一座耀眼的具有代表性的伊斯兰建筑. 阿罕布拉宫的墙壁和地板都用复杂的几何图案装饰. 其中一些在彩图17中有所展示. 其中大部分让看到的人都会本能并直观地承认每种图案都是对称的，具有自身独特的对称方式. 不过能用数学公式表示这种直观的“对称”概念吗？答案的关键在于数学上群的概念.

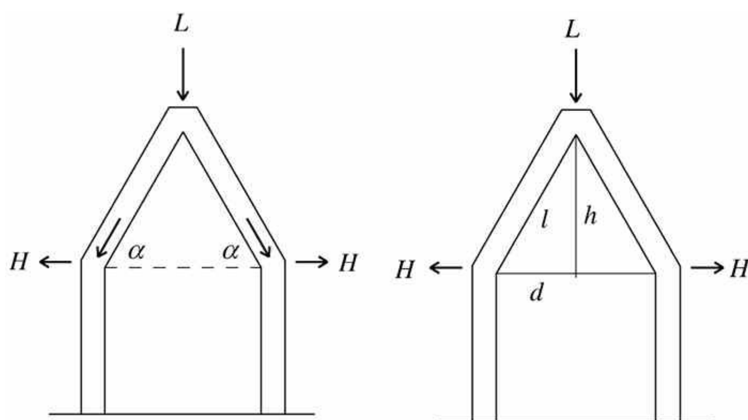


图　**3-41**



彩图 **17**　阿罕布拉宫中的几何图案．最左边和右上：Jebulon 摄．中上：Jebulon 摄，版权归 GFD and Creative Commons Attribution 所有．右下：R. S. Tan 摄．中下： Dharvey 摄，版权归 GFD and Creative Commons Attribution 所有

设n为正整数，令 $1,2,\ldots,n\text{-}1,n$ 为前n个排成一列的连续的正整数．以其他顺序对这n个数进行的任何重排都是 $1,2,\ldots,n\text{-}1,n$ 的一个排列．保持原来序列不变的“重排”也包含在内，称为恒等排列．我们将用$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ _ & _ & \cdots & _\end{pmatrix}$的形式表示排列的数字，其中重新排列过的$n$个数放在第二行．用这种方式表示排列，对所作的变动进行了强调．由于n个整数中任何一个都可以放在1下面，剩下的n-1个整数中的任何一个都可以放在2下面，依此类推，则共有 $n(n-1)(n-2)\ldots2\times1$ 个排列．将该乘积写作 $n!$，称为n的阶乘．任意两个排列P和Q都可以结合，或者说相乘，通过先应用P再应用Q，从而形成排列PQ．对任意排列P，恒等排列I满足$PI=IP=P$．由于确定排列P的重排可以逆序，则存在一个排列Q，使得$PQ=QP=I$．这样的Q是P的逆排列．事实上，对任意三个排列P、Q和R，P与QR的乘积等于PQ和R的乘积，用公式表示，即$P(QR)=(PQ)R$．任何集合如果其乘法运算满足上述恒等、逆和相乘的性质，都被称为一个群．一个群内不同元素的数目称为该群的阶．上面所描述的特殊例子是有n个元素的置换群．注意其阶为$n!$．群论是现代数学的重要分支．群论中与下面要讨

论的内容有关的方面由法国数学家（也是政治活动家和革命家）埃瓦里斯特·伽罗瓦（1811—1832）提出，他理解其在多项式方程可解问题上的作用．（这位年轻的天才就在他得出这些结论后不久死于一场决斗．）

让我们仔细考虑一下n=4的情况，此时有4!=24个排列．它们由下列的24个对1，2，3，4的重排构成：

1, 2, 3, 4　1, 2, 4, 3　1, 3, 2, 4　1, 3, 4, 2　1, 4, 2, 3　1, 4, 3, 2

2, 1, 3, 4　2, 1, 4, 3　2, 3, 1, 4　2, 3, 4, 1　2, 4, 1, 3　2, 4, 3, 1

3, 1, 2, 4　3, 1, 4, 2　3, 2, 1, 4　3, 2, 4, 1　3, 4, 1, 2　3, 4, 2, 1

4, 1, 2, 3　4, 1, 3, 2　4, 2, 1, 3　4, 2, 3, 1　4, 3, 1, 2　4, 3, 2, 1

对应的排列是 $I=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$，以此类推，最后是 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$．令 $P=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$，求$PQ$的积．先应用$P$，再应用$Q$，则有 $1\to1\to4$，$2\to3\to2$，$3\to2\to3$，$4\to4\to1$．因此 $PQ=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$．

考虑图3-42中的多边形．除了图3-42(a)的第一个等腰三角形和3-42(c)的菱形，其余都是正多边形．其顶点处的数字标记固定不变（不过数字并不是图案的一部分）．我们认为每个多边形都是刚性框架．从图3-42(a)的等腰三角形开始，使该三角形绕图示的垂直轴线翻转并使它回到原平面，这就交换了顶点1和2的位置，但三角形看起来与翻转后的完全相同．实际上，似乎它根本没有移动过．任何用这种方法改变图3-42中多边形的位置且使人们不能判断该图形是否移动的举措即称为该多边形的对称变换．既然任何对称变换都会移动顶点，它就是标记这些顶点的数字的一个排列．考虑对称变换时，主要关注最终的结果，即它所带来的顶点的排列．尤其是如果两个对称变换带来相同的顶点排列，则这两个对称变换等价．那么哪些顶点排列是对称的呢？恒等排列当然是．既然我们认为多边形是刚性的，移动它们的唯一方法是绕一点旋转、绕一个轴翻转、平移（在平面内横向移动而不旋转）或者上述措施的综合运

用．既然对称变换改变多边形的位置，使它与自身重叠，则如果不涉及翻转，可以通过绕多边形的中心旋转得到；如果涉及，则通过沿中心所在的一条直线翻转，然后再绕该中心旋转得到．考虑图3-43(a)中的圆及弧*AB*．图3-43(b)展示了该圆沿轴*L*翻转，再旋转到一个新位置的情形．图3-43(c)表明先翻转再旋转得到的图形也可以通过只沿另一个轴翻转完成．将其用在对图3-42的多边形的讨论中，我们看出该多边形的任一对称变换要么是绕中心旋转，要么是沿过中心的一条直线翻转．从而可知对称就是指那些由这类旋转及翻转所确定的排列．我们可以观察到任一多边形的两个对称变换的乘积（先应用一个，再应用另一个）还是对称变换．因为旋转的逆还是旋转，翻转的逆是其自身，所以任何对称变换的逆还是对称变换．可知任一多边形的对称变换构成群，即多边形的对称群．它是一个有n个元素的置换群的子群，根据所考虑的具体多边形，$n = 3$、4、5．图3-42(a)中的等腰三角形有两个对称变换：恒等变换和上面已讨论过的翻转．即顶点 1、2、3 的排列为$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$．因为翻转变换是唯一的对称变换（除了恒等变换外），该等腰三角形只有左右对称．左右对称在建筑中很常见．它在本书图2-12、图2-42、图3-7、图3-13、图3-29和图3-30的结构中都有体现．

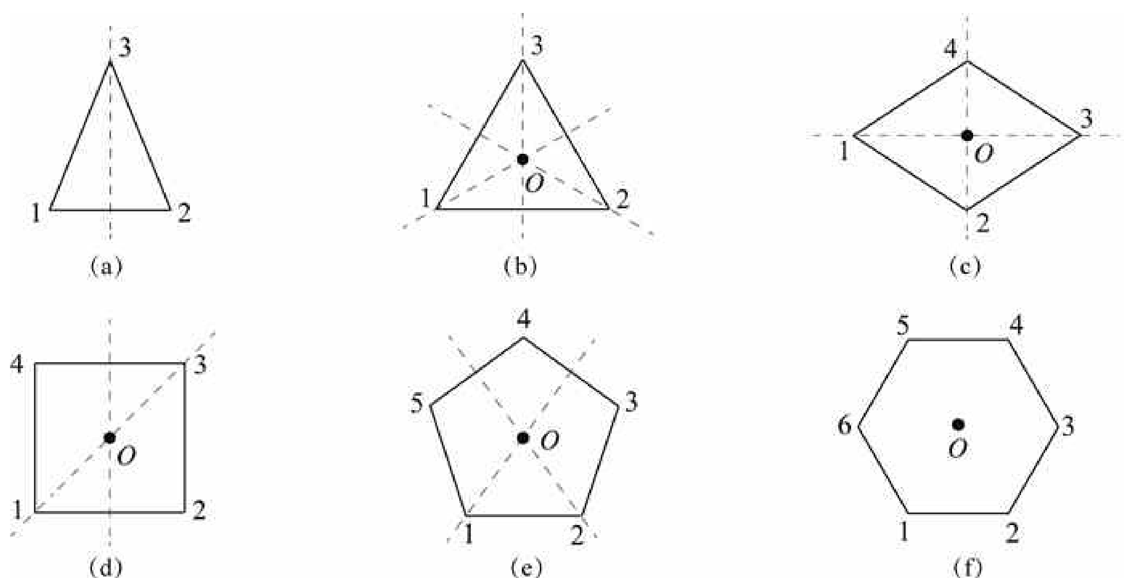


图　**3-42**

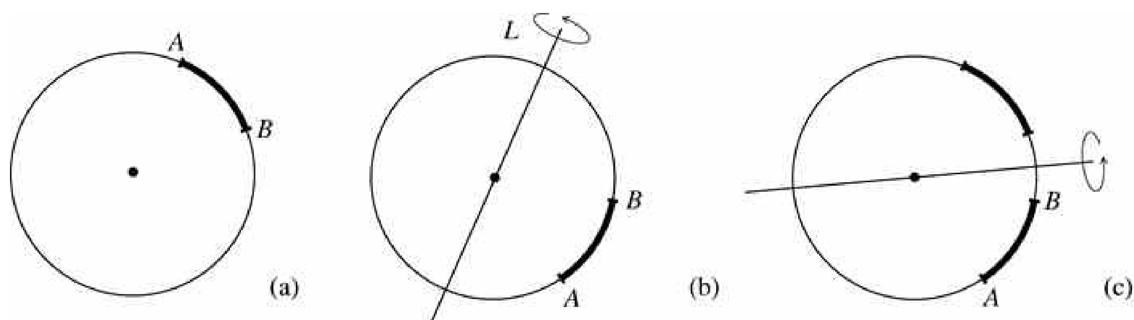


图　**3-43**

接下来研究图3-42(b)的等边三角形．它有两个与等腰三角形相同的对称变换，但它还有其他的对称变换．例如该三角形绕其中心O逆时针旋转120°后，又回到同一位置．它确定了顶点置换 $1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$．注意顺时针旋转 120°确定的置换 $1 \to 3, 3 \to 2, 2 \to 1$ 也能通过逆时针旋转240°得到．对更一般的情况，得到这样的结论也并不困难．设 θ 为满足 $0° \le \theta \le 360°$ 的任一角．一个多边形顺时针旋转 θ 得到的顶点置换与逆时针旋转 $360° - \theta$得到的顶点置换相同．由于这个原因，我们只考虑逆时针旋转．

问题**11**　等边三角形的顶点1、2、3的6个置换如下：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

验证它们都是对称变换．对每个置换，如果它是一个旋转，确定旋转的角度，若是一个翻转，则确定翻转的轴．设P是一个沿过顶点1的轴所进行的翻转，Q是一个沿过顶点2的轴所进行的翻转，计算乘积PQ．结果是6个置换之中的哪一个？

考虑图3-42(d)的正方形，列出其对称变换．旋转变换包括逆时针旋转0°（恒等变换）、90°、180°和 270°．翻转变换也有4个，它们沿下列4个过O点的轴进行：水平线、垂直线、过顶点1和3的直线、过顶点2和4的直线．正方形的对称群有4个旋转和4个翻转．因此数字1、2、3、4构成的 4!=24个置换群中，只有8个是正方形的对称变换．

问题**12**　写出正方形的8个用数字形式描述的对称变换．指出对称变换

$$P=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix} \text{ 和 } P=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$

以及它们的乘积PQ和QP是如何移动这个正方形的.

问题**13**　列出图3-42(c)中菱形的所有对称变换．其中有多少个旋转，多少个翻 转？比较菱形和正方形的对称群.

问题**14**　图3-42(e)的正五边形的有10个对称变换，其中有5个旋转、5个翻转．5个旋转的旋转角度是多少，5个翻转的轴是哪些直线？图中给出了两个翻转的轴，用数字形式表示这两个翻转.

问题**15**　考虑图3-42(f)的正六边形．它有12个对称变换，其中有6个旋转，6 个翻转．则$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}$的旋转角度是多少？其他5个旋转的旋转角度是多少？$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&2&1&6&5\end{pmatrix}$的翻转轴是哪条直线？给出其他5个翻转的翻转轴.

问题**16**　绘制对称群的阶为1、2、4的六边形，再绘制对称群的阶为3、6的六边 形．【提示：对阶为2和4，将两个梯形放在一起．对阶为3和6，将两个等边三角形合并起来．】

考虑一个多边形．若n它有个顶点，则它就是n边形．一个n边形，如果它的n个顶点均匀分布在同一个圆上，则该多边形为正多边形．圆的中心也是该多边形的中心.

设给定一正n边形．R表示逆时针绕中心O旋转$\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$．则旋转

$$R,R^2=RR,R^3=RRR,\ldots,R^n=I$$

都是正n边形的对称变换．设L为任一过O点的直线，它与正n边形相交的两个交点或者是顶点，或者是多边形边的中点．则共有n条这样的线，且由这些线所确定的n个翻转是这个n多边形的对称变换.

问题**17**　探讨上文对图3-42的正多边形作出的结论，并考虑更一般的情

况．证明正n边形的每个对称变换都是上述的一个旋转或翻转．

上面的讨论不仅适用于多边形也适用于任何图案．图案的对称程度需要根据对它的对称变换的研究来评定．不改变图案形状的“移动”或者说变换就是该图案的对称变换．让我们先从彩图17左侧的图案开始．它包含重复出现的带浅色边的花形单元．注意该图案是左右对称的．除此，还能看出图案的形状并未因平移（例如向上或向下移动一个单元）而改变．观察彩图17的其余4种图案，如同前面的多边形一样，我们把自己的注意力限制在旋转和翻转以及它们所确定的对称群上．

图3-44是选自彩图17的一个图案．考虑落在两个圆中较小的圆里的部分图案．观察可知，如果将中心星形的16个顶点一一连接起来，则得到一个正十六边形．注意该图案的对称变换恰好就是正十六边形的对称变换．（你要忽略在正中心的鸟．）可知这个图案有16个旋转，16个翻转，其对称群的阶为32．考虑落在大圆中的大图案（在大脑中设想该图案）并用同样的方式对它进行分析．

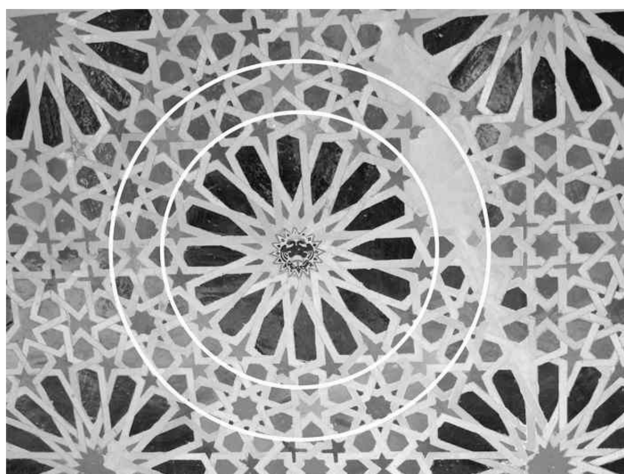


图**3-44　Jebulon**摄

问题**18**　研究彩图17剩下的3种图案．对每种图案都给出对应的正多边形、旋转和翻转，并确定对称群的阶．

问题**19**　观察图3-24中沙特尔大教堂的玫瑰花窗．讨论包括旋转和翻转在内的该窗的对称变换是什么．对称群的阶是多少？

沙特尔大教堂的玫瑰花窗图片提出了一个将在第5章结尾讨论的基本问题，即为什么这个圆形窗户在图中看起来像是椭圆？

问题**20**　我们关于对称性的数学讨论蕴含着这样的内容，即图形的对称群越大，它就越对称．这符合你的对称概念吗？例如，你认为圆（它的对称群的阶是多少？）比六边形更对称吗？

讨论**3.2**　诺曼式建筑　11世纪末，诺曼底（今法国北部英吉利海峡地区）的大公统治了法国和英格兰的许多地区．他后来以征服者威廉闻名于世．诺曼式建筑在诺曼人控制的地区发展起来．卡昂的圣艾蒂安大教堂（威廉埋葬在这里）和达拉谟大教堂是两座杰出代表．圣艾蒂安大教堂于1066年开始施工，到13世纪建成．达拉谟大教堂的施工始于1093年，40年后大体完工．这两座大教堂的半圆形拱券和中殿侧面的大型墙壁都证实它们均继承了罗马式传统．图3-45描绘了达拉谟大教堂中的半圆形拱券和墙壁．但是，中殿上方的拱顶是肋拱顶，而非预期的筒拱顶．建筑历史学家认为这是重要的结构革新，后来哥特式教堂的特征就源自这两座教堂．科尔多瓦大清真寺（见图3-10）的肋拱穹顶建得更早，但它的布局不同，且规模要小得多．这两座教堂中殿的墙壁外部都在拱肋汇聚的地方用垂直结构加固过．该特点后来发展为哥特式建筑的飞扶壁．

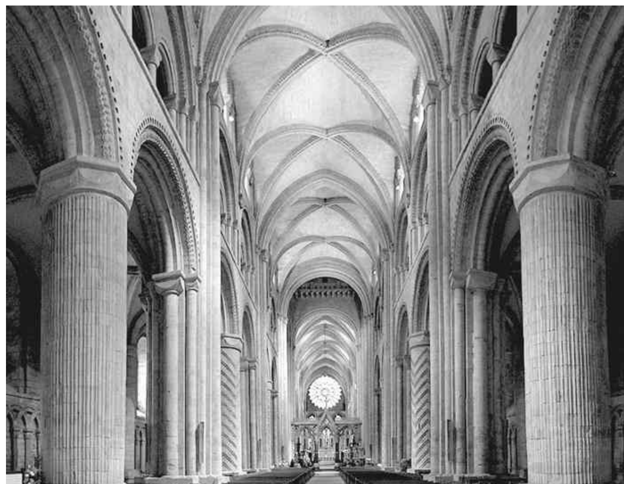


图**3-45　Oliver Bonjoch**摄

讨论**3.3**　中世纪的建筑实践　本章所讨论的建筑，包括伟大的罗马式和哥特式大教堂，均是人工建造的．人们用简易工具切割木材和石料，用人、驴子或牛拉动简易升降机来将其吊起，通过不牢靠的脚手架把它们放到合适位置．人们用斧头、锤子和凿子加工石料；在木箱里混合并处理灰泥，将其盛在轻便的泥槽里递给砌墙的泥瓦匠；用楔子和锤子切割并截断木头，用斧头做预处理，从而得到光滑的表面．人们大量使用

各种单手或双手操作的锯．钻的钻头由贝壳制成，靠转动木头支架来为销子、钉子和金属夹具钻孔．刨子、凿子、锤子和木槌组成木工的工具箱．在石匠大师（到后期才使用建筑师这个头衔）的带领下，一支由专业采石工、石匠、砖匠、木匠、铁匠、泥水匠、瓦匠、油漆工、玻璃工和雕刻家组成的队伍，在学徒和体力劳动者的协助下，就能建起一座建筑．熟练的手工艺人现场教授学徒这门手艺的方方面面．他们经证明可以出师后，就会拿到劳动报酬（单词journey源自法语单词journée，意为一天的工作，也指一天劳动所获得的补偿）．这样的建筑队伍在一个项目到另一个项目间奔走，设计理念和建筑方法也随之传播开来．不过石匠大师的知识被小心地保护，秘而不宣．只有最有经验、最熟练的工人才能升为该门手艺的大师，只有最有才干的工艺大师才被委托指导建筑项目并被授予建筑师的头衔．关于中世纪建筑实践和方法的书面文件很少．甚至欧洲天主教修道院的档案室和图书馆收藏的也不多．这些记录涉及建筑合同和建筑物尺寸，但除了应“根据传统模型”建造的意见外，很少有建筑细节．残存的早期记录是维拉尔德·奥·内库尔在1225~1250年的笔记本．这些笔记本的内容覆盖了从几何学问题到拱顶和屋顶桁架设计以及石工、木工和装饰工作．里面有内外立面图和平面图（以垂直和水平剖面为代表）的素描以及确定拱顶中拱肋位置和墙壁厚度的详细资料．即使到后来，诸如《米兰大教堂建筑委员会年报》（1392以及1400~1401年）里记录的见解也很少．不过由亲眼目睹施工现场的人绘制的图片资料却比较丰富．图3-46和图3-47展示了其中的两幅，让人们看到了施工现场的活动及所使用的工具．图3-46还表现出一个建筑师正从皇家赞助人那里接受指示．

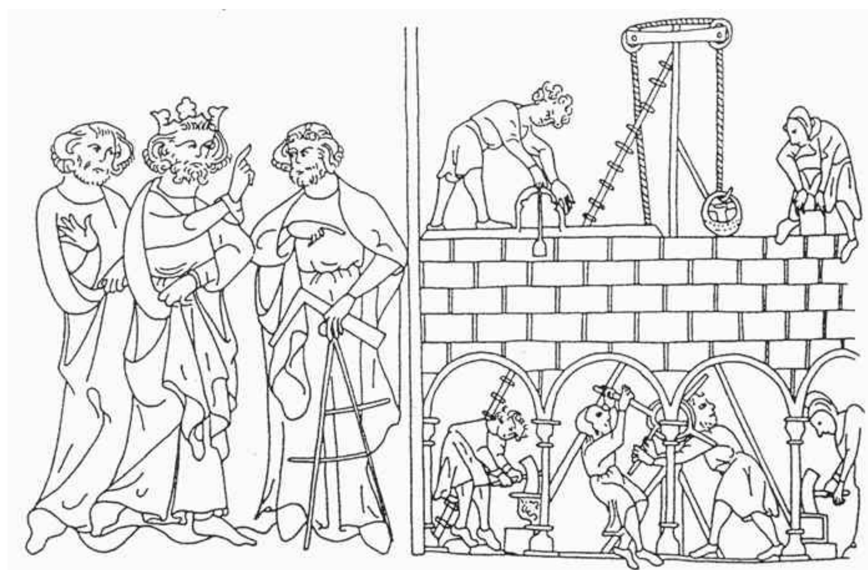


图**3-46**　**Offas**的生活，钢笔画，**14**世纪末，伦敦大英博物馆，**Cotton NeroD I**[1]，第**23**张对开页．选自**Günther Bending**的《中世纪建筑技术》（***Medieval Building Techniques***），**Tempus**出版，**2004**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术建筑藏书室

1 Cotton指来自科顿私人图书馆的收藏，科顿先生最初以凯撒时期的人物、字母和罗马数字给书进行分类．大英博物馆接受捐赠后，保留了这一方法．Cotton Nero D I指尼莫胸像所在的书柜第四层第一本书．——译者注



图**3-47**　插图，**13**世纪中期，旧约全书缩微．纽约摩根图书馆，**MS M638**，第**3**张对开页**. David A. Loggie**摄，**1990**

中世纪是皇室、领主、贵族、骑士、封臣、农夫和农奴的时代．这是一段战火频仍的时期．施工队建造高耸的大教堂，也建造强大的城堡和有

围墙保护的城镇．像建于800年到1300年间的有城堡的法国城镇卡尔卡松就是现存的一个很好的例子.

第4章　数学的传播及在建筑中的转化

公元12世纪到15世纪期间，地中海周边地区发生了一些根本性的变化，并波及它的北面和东面．伊斯兰势力的影响逐渐减小．在西方，基督教收复失地运动终结了伊斯兰对西班牙的占领；在东方，蒙古进军终结了塞尔柱土耳其王朝的势力．拜占庭帝国的领土持续处在伊斯兰扩张的压力之下，发展逐渐停滞，不再具有创造性．到15世纪，新生的奥斯曼土耳其王朝终于将其灭亡．但对于信奉天主教和基督教的欧洲而言，这是一个生机勃勃、充满进步和发展的时代，是该地区开始形成当前这样的特性和制度的时期．农业方式的改进解放了人们，使他们进入城镇．工业生产和商业活动增加．人们建造了医院，设立了银行．商人和产业工人自己组织起来，形成所谓行会的机构．行会组织就业，设定价格和工资，促进和规范贸易．各条贸易路线穿过黑海和地中海，沿着大西洋海岸，越过北海和波罗的海，经过隆河、塞纳河、多瑙河、莱茵河、第聂伯河、伏尔加河及其他大河沿岸，翻越阿尔卑斯山，逐渐发展起来．它们将诸如威尼斯、热那亚、比萨、佛罗伦萨、米兰、维也纳、奥格斯堡、里斯本、波尔多、巴黎、伦敦、汉堡、但泽、里加和基辅这样重要的欧洲城市与巴格达、大马士革、开罗和君士坦丁堡连接起来，运送木材、羊毛、棉花、丝绸、糖、盐、香料、小麦、干果、酒、鱼和皮毛．信奉基督教的欧洲的人口和财富都得到了增长．

同时期另一项重要的进步是哲学、法律、修辞、科学及数学方面的古典希腊和罗马著作传入信奉基督教的欧洲．它们本来被保存在伊斯兰图书馆内，供伊斯兰、犹太和拜占庭学者使用．在回到基督教控制后，它们被翻译成拉丁文，并在西班牙的托莱多、西西里的巴勒莫及其他城市所建的中心机构中被抄写了多遍．这些抄本在学者之间广泛传播．12世纪和13世纪，大学在主要的欧洲中心如巴黎、牛津、博洛尼亚和帕多瓦建立起来，它们一般由教会资助．成千上万的学生攻读法律或医学，或者学习从事政府或教会工作．大学成为学术演讲、讨论及辩论的中心，在这里希腊理性与天主教信仰相互竞争．亚里士多德关于人类天性及灵魂、自然科学和宇宙的观点向已确立的解释发起挑战．如何理性地根据经文和神圣权威提供的相关真理推导真理？宇宙受人类思想所能理解和分析的规律支配吗？还是上帝享有随心所欲的绝对自由，排除了这一秩

序的存在，进而无法对它进行理解？这些议题的双方都有强大的支持者，甚至包括当时最伟大的思想家．重要的是这些辩论并不是发生在虔诚和世俗的对手之间，而是在天主教会的知识界内部．经过旷日持久的激烈争论，巴黎的哲学和神学教授、道明会的牧师托马斯·阿奎纳斯提出了信仰和理性的综合．他确信在上帝所维持的宇宙内，存在人类头脑能够掌握的模式和规律．

从12世纪开始，欧洲学者通过钻研欧几里得、阿基米德、阿波罗尼斯和托勒密的著作抄本，学习希腊科学和数学．他们从欧几里得的《几何原本》学到了希腊人所理解的数字和几何学知识．他们根据阿波罗尼斯的《圆锥曲线》和阿基米德的作品研究用平面切割圆锥所获得的曲线．椭圆和抛物线是相关性最强的例子．欧洲学者还从克罗迪斯·托勒密《天文学大成》的伊斯兰讲解中研究希腊人关于天体运动的杰出数学理论，从托勒密的《地理学指南》（*Geographike*）中看到让人难以置信的已知世界的地图．欧洲学者从伊斯兰数学家的作品中获得了印度—阿拉伯数字系统的知识，而几乎在同一时间，欧洲贸易商也看到了伊斯兰商人如何将这一系统付诸使用．欧洲人吸收所有上述知识并进而作出自己的贡献还需要一段时间． 16世纪，代数学方面取得了重大进展．最重要的是， 17世纪早期，伽利略发现抛掷物的轨迹是抛物线；在哥白尼提出日心说之后，开普勒观察到行星的轨道是椭圆．17世纪中期，笛卡儿和费马将希腊几何学与印度—阿拉伯数字系统相结合，形成一种单独的数学结构．这就是解析几何，它将欧几里得几何学在平面和空间中进行量化，并在这一过程中融合了代数和几何学．

与欧洲学者通过学习古典思想家的作品从而在科学与数学方面取得重大进步相同，欧洲建筑人员也受到了古典希腊和罗马结构及形式的启发．他们在15世纪和16世纪吸收了希腊和罗马建筑的柱子、拱券、山花和门廊，完善他们的设计，将这些作为和谐、雄伟、辉煌的新建筑的元素．这是文艺复兴建筑的内容，将在第5章中讲述．其中一名提出这种新型建筑艺术的、创造力丰富的天才是来自佛罗伦萨的菲利波·布鲁内莱斯基．他认真研究了古代罗马的建筑，学习了其浴室、巴西利卡、圆形剧院和神庙的拱顶和穹顶的设计与施工方法．15世纪初期，内部是显著哥特式风格的佛罗伦萨大教堂的十字交叉处上空还是敞开的八角形大洞，还没有被穹顶盖上．将要兴建的穹顶的规模空前，并将产生空前的大负载．布鲁内莱斯基规划了该穹顶并监督了它的施工过程．通过将罗马结构特征结合到设计中，他克服了穹顶的大负载及侧推力．佛罗伦萨大教堂预示着新建筑艺术的开始，标志着建筑从哥特时代走向文艺复兴．

从建筑开始兴建的那一刻起，建筑师已经在平坦的地面、羊皮纸和纸上画好了直线、圆和圆弧，来完成他们的设计，通过把平面、圆柱和球转化为墙壁、柱子、拱顶和穹顶，来实施他们的设计．数学家在坐标平面内研究直线、圆和其他曲线，在坐标空间内研究平面、球体和其他形状，作为理想的数学抽象．无疑，对曲线和形状所做的数学研究会影响建筑师绘制的曲线及实现的形状．本章的目标首先是讲述解析几何的历史，它以希腊人的贡献作为开端，结合了伊斯兰的发展；然后应用解析几何来研究直线、圆、平面和球体；最后用这一研究来分析佛罗伦萨大教堂八角形穹顶逐渐上升的形状，而这只是解析几何在建筑中最普通的应用．第5章的最后一节给出了它在透视法研究上更丰富的应用，第6章和第7章的几节展示了解析几何的应用（以及微积分）是如何为理解建筑结构提供重要知识的．

4.1　神奇的曲线与神奇的地图

欧洲人从翻译的作品中学习到希腊数学的知识，包括对抛物线和椭圆的研究．它们与双曲线一样都是圆锥曲线，即用一个平面切割对顶圆锥所得到的曲线．（单词section源自拉丁单词表示切割．）虽然欧几里得已经知道了这些曲线（见图4-1），但直到希腊的阿波罗尼斯（约公元前262年—公元前190年）才深入、广泛地对它们进行了分析．我们将讲述他对抛物线和椭圆的分析，而省略对双曲线的分析．

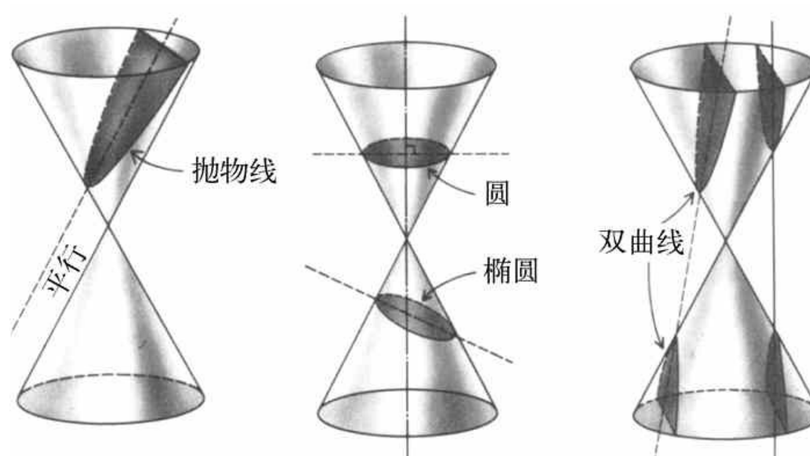


图　**4-1**

本节给出一个完全平坦的数学平面．这样就能测量距离，比如平面内两点之间的距离，此外，还给定长度单位，如英寸、英尺或米．对平面内的两点P和Q，PQ或QP代表连接这两点的线段．如果在公式中出现PQ，则认为它是线段PQ的长度，即P和Q之间的距离．

我们先从抛物线开始．在平面内固定一条直线D和一个点F，其中F不在D上．由D和F所确定的抛物线是平面内所有满足P点和F点的距离等于P点到直线D的垂直距离的P点的集合．直线D称为该抛物线的准线，F称为该抛物线的焦点．过焦点垂直于准线的直线称为该抛物线的焦轴．图4-2展示了上述内容．它给出了焦点、准线、焦轴，确定了抛物线上的几个P点．每种情况下，P点到F点之间的线段长度都等于P点和直线D间的虚线段的长度．我们只回顾阿波罗尼斯著作中关于抛物线的两个基本命题，但不做证明．

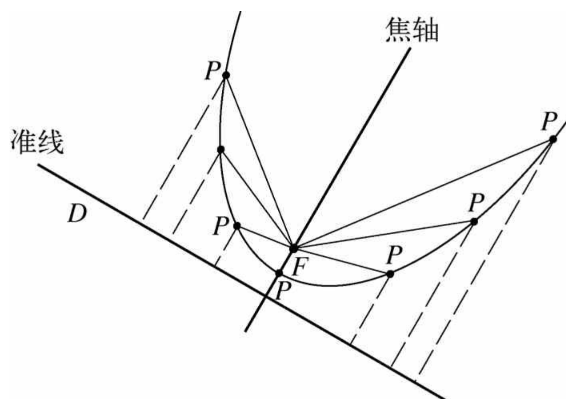


图　**4-2**

命题**P1**　设P为抛物线上的任一点，考虑过P点的切线．切线与P点和焦点之间的直线在P点处的夹角等于该切线与过P点的焦轴的平行线在P点处的夹角．（图4-3展示了3个不同的P点的情况．）

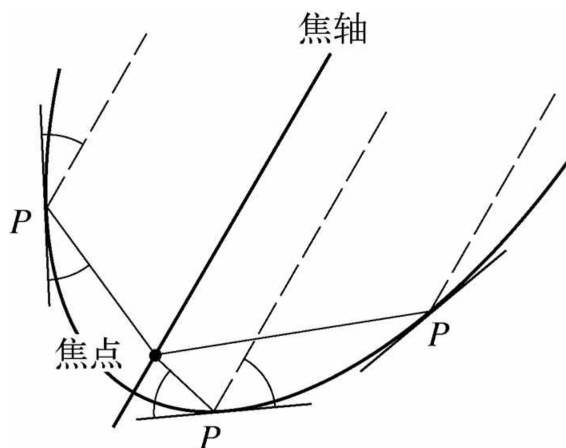


图　**4-3**

命题**P2**　把抛物线与其焦轴的交点记为O，考虑过O点垂直于焦轴的直线．令A和C为该线上的任意两点，其中C与O点不是同一点．令B和D为抛物线上的点，满足AB和CD均平行于焦轴．（图4-4展示了上述内容．）则有

$$\frac{AB}{CD}=\frac{OA^2}{OC^2}$$

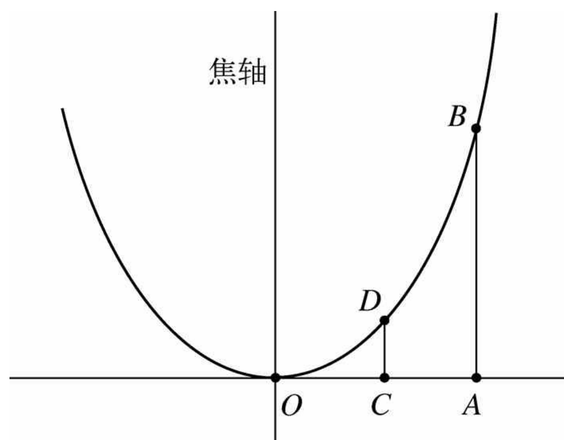


图　**4-4**

我们继续研究著名的阿基米德（公元前287年—公元前212年）的数学发现．抛物线截面是指取一条抛物线并用某种方式对它进行切割所得到区域．图4-5展示了由*AB*所切割的抛物线截面．取抛物线上的一点*C*，它满足过*C*点的切线平行于该割线，考虑△*ABC*．结合阿波罗尼斯关于抛物线的基本性质（包括命题P2），按照高标准的数学精度及严谨性进行论证，阿基米德证明了抛物线截面的面积等于内切△*ABC*面积的$\frac{4}{3}$．他的证明是早期微积分的一个特殊例子．

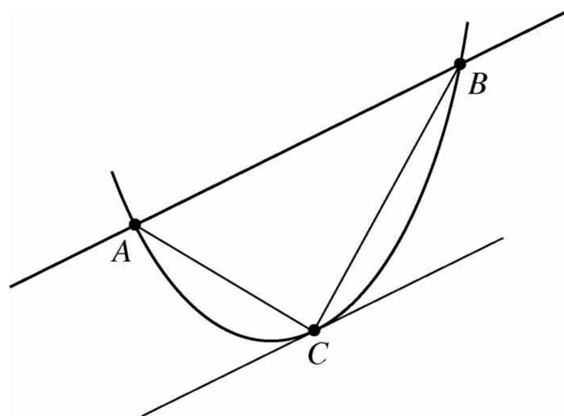


图　**4-5**

接下来我们转向椭圆．固定平面内的任意两点F_1和F_2，确定一个常数k，其值大于F_1和F_2之间的距离．考虑所有P点的集合，它满足从P点到F_1点的距离与P点到F_2点的距离之和等于k，或者写作 $PF_1 + PF_2 = k$．这些点的集合就是椭圆，它由点F_1、F_2和k确定．在图4-6中，注意如果

从P点出发的实线段与从P点出发的虚线段的距离之和等于k，则P点就在该椭圆上．点F_1和F_2是该椭圆的焦点．过焦点的直线是该椭圆的焦轴．线段$F_1 F_2$的中点C为椭圆的中心．从椭圆上的一点过中心到达另一边上的点所形成的任一线段都是椭圆的直径．过两个焦点的直径长度的一半是该椭圆的半长轴，垂直直径长度的一半是半短轴．考虑圆心为C点半径为r的圆，为什么它是焦点 $C = F_1 = F_2$ 及k=2 r的椭圆？

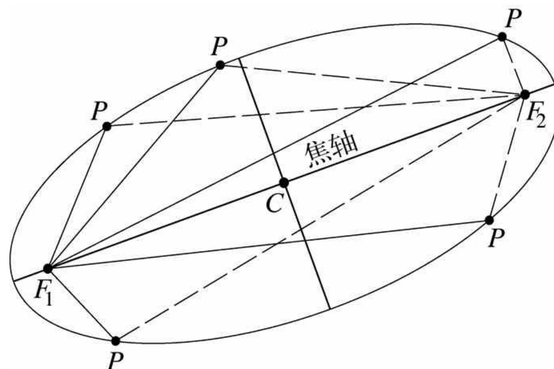


图　**4-6**

下面是关于椭圆的两个基本命题，也出自阿波罗尼斯著作，同样也不做证明．

命题**E1**　设P为椭圆上的任一点，考虑椭圆在P点的切线．则该切线与从P到一个焦点的直线在P点的夹角等于该切线与从P点到另一个焦点的直线在P点的夹角．（图4-7(a)展示了4个不同的P点的情况．）

假设该椭圆为一个圆．则它的两个焦点是同一点，即圆心．因此图4-7(b)和命题E1告诉我们半径与切线的夹角等于90°．我们能得出这样的结论，即对任一圆和该圆的任一半径，半径和圆相交的那点处的切线垂直于该半径．我们在第2章研究罗马竞技场的椭圆时用过这一事实．

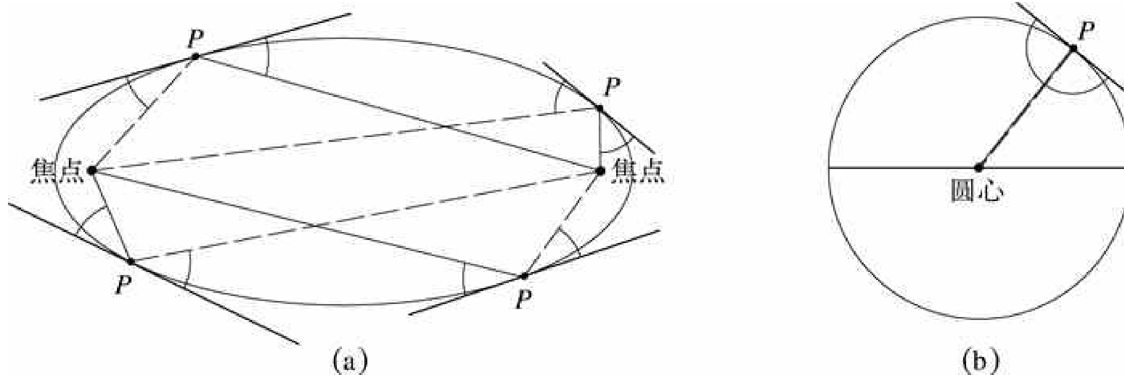


图　**4-7**

命题**E2**　令P和Q是椭圆与其焦轴的交点．令A为焦轴上P和Q之间的任一点，B为过A点的焦轴的垂线及椭圆上的一点．（注意B有两种可能性．）图4-8给出了提到的这些点．无论A位于P和Q之间的何处，比值$\frac{PA\times AQ}{AB^2}$都是相同的．

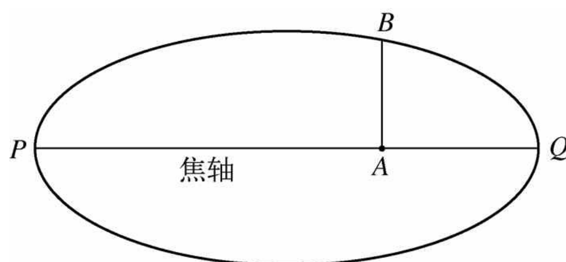


图　**4-8**

我们再看一下命题P2和命题E2．回顾图4-4．选择C点使OC=1，设CD=c．令OA=x，AB=y．因为点A可以位于过O点的水平线上的任一处，x和y都是变量．通过应用命题P2，$\frac{y}{c}=\frac{x^2}{1^2}$，因此$y=cx^2$．接着再回到命题E2．令$C$为图4-8中椭圆的中心，设$a$为$PC$的长度．考虑$PQ$在$C$点的垂线，令$b$为从$C$点到椭圆的线段长度．参见图4-9．当$A$=$C$时，有$\frac{PA\times AQ}{AB^2}=\frac{a\times a}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}$．现令$A$为$PQ$上的任一点．令$x$=$CA$，$y$=$AB$．因为$A$能在$PQ$的任一处，$x$和$y$都是变量．如果$A$在$C$点的右侧，则$PA$=$a$+$x$，$AQ$=$a$-$x$，我们可得$\frac{PA\times AQ}{AB^2}=\frac{(a+x)(a-x)}{y^2}$．验证当$A$点在$C$点

的左侧时，该方程仍然成立．命题E2告诉我们对于任何A，比值$\frac{PA \times AQ}{AB^2}$都是相同的，因此$\frac{(a+x)(a-x)}{y^2}=\frac{a^2}{b^2}$．经过代数变化，得$a^2-x^2=a^2 \times \frac{y^2}{b^2}$．这样$1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$，从而得出$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．

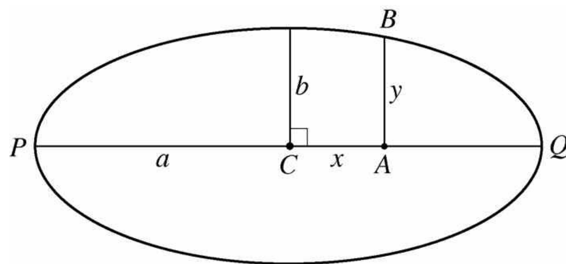


图　**4-9**

在抛物线的情况中，注意方程 $y = cx^2$ 将B点到固定的垂直轴的距离x和B点到固定的水平轴的距离y联系起来．同样的情况也发生在椭圆身上．方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$将$B$点到固定的垂直轴的距离$x$和$B$点到固定的水平轴的距离$y$联系起来．如果你在工作中曾见到过$xy$坐标系，你就会意识到阿波罗尼斯掌握了这样的系统．不过要注意的是，他确实只是在考虑特殊情况：抛物线和椭圆（以及双曲线）时才这样做．

天文学家和数学家克罗迪斯·托勒密在公元2世纪研究了天体，设计出一张精细的圆形轨道图表，描述了以地球为静止观测点，太阳、月亮和行星如何运动．托勒密在他的专著《天文学大成》（*Almagest*，该名是其希腊题目*Megiste Syntaxis*的阿拉伯语衍生词，Megiste意为“最伟大的”，Syntaxis意为“系统或集成”）中提出这一复杂的太阳系数学模型．在17世纪伽利略确定太阳中心论、开普勒引入椭圆形轨道之前，它都是公认的行星运动理论．克罗迪斯·托勒密也是优秀的制图师．他的著作《地理学指南》（*Geographike Syntaxis*）奠定了制图科学的基础．其希腊语手稿从君士坦丁堡传播到西欧并于15世纪早期翻译成拉丁文．中世纪的制图师根据文本提供的精确的位置信息，重新绘制了非凡的地图．彩图18给出了托勒密的世界地图的早期印刷版．很容易在其中认出欧洲地中海周围的重要地区．北非和阿拉伯半岛也容易识别，但印度和远东则并

不准确，非洲中部和南部是未知领域．与我们当前的讨论最相关的是地图上有许多垂直的纬线与水平的经线相交．托勒密设计了这种精细间隔的栅格来绘制地图并提供主要外形的准确位置．他像使用坐标系那样来使用栅格．《地理学指南》中包含有8000个地点的坐标，使人们能够重建这些地图．地图底边的细长数字告诉我们托勒密的纬线将地球的已知区域分为180°．托勒密知道早期希腊人对地球周长的估计，意识到他已绘制出约半个地球的地图（当然，他对缺失的另外半个地球一无所知）．克里斯托夫·哥伦布用托勒密的地图向伊莎贝拉女王和西班牙国王费迪南德解释他能向西航行到达亚洲．事实上，托勒密的地图低估了地球的尺寸，从而低估了需要航行的距离，而这有可能帮助哥伦布取得辩论的胜利．



彩图 **18**　《地理学指南》（*Geographike*）中托勒密的世界地图，Lienhart Holle 出版社，乌尔姆（Ulm），1482 年，Johannes Schnitzer 雕刻

我们已经看到阿波罗尼斯和托勒密对坐标系的一些重要的具体例子有一

定理解．但他们距离在平面上设计出抽象的坐标系并结合数值精度分析任何曲线还有多远？事实是他们缺少了关键的元素．

4.2　数轴

希腊人对数学的贡献让人惊叹不已．他们将几何学作为从一些核心定义和陈述出发，用一种紧密、合理的方法推导出其他所有知识的数学结构，从而将几何学（如今的欧式几何）公理化．他们研究了圆锥曲线，提出椭圆、抛物线和双曲线的所有基本性质．最后，他们发明了促进现代微积分产生的方法．但倾其所有的聪明才智，他们还是遇到了算术问题．毕达哥拉斯学派如同他们的前辈巴比伦人一样，知道给定单位长度，可以准确测量一些图形的边长．边长为3、4和5的直角三角形就是一个简单的例子．但取一个可能是最简单的图形，边长为1的正方形，考虑其对角线，如图4-10所示．如今我们知道它的长度可以表示为带小数的数字d．希腊人如何考虑这一数字？毕达哥拉斯定理告诉他们d需要满足 $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$．但之后怎样？毕达哥拉斯学派持有根深蒂固的信仰，即数字解释一切．对他们而言，数字是有理数，即数字可以表现为分数$\frac{n}{m}$，其中n和m为整数．因此，很明显毕达哥拉斯学派要问：什么整数n和m，才能使$d = \frac{n}{m}$？这时毕达哥拉斯学派认识到这样的等式是不存在的，因此d不能等于他们的数字中的一个．这么简单就能构造出来的正方形的对角线，其长度却不能用他们体系中的数字表示，对毕达哥拉斯学派而言，这是一个问题．它在毕达哥拉斯学派的成员中引起了混乱，很有可能导致了它的消亡．

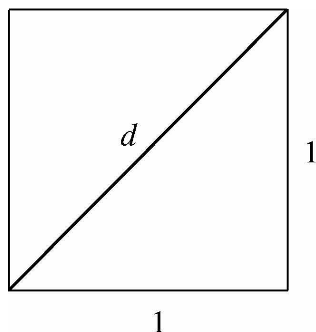


图　**4-10**

亚里士多德的著作中包含有$d = \frac{n}{m}$形式的等式不能成立的证据（这一证

据如今仍普遍使用）．我们将用刚才的几何学例子证明这一事实．方法是假设对某些正整数n和m，$d=\frac{n}{m}$，证明这会产生矛盾．因为$2=d^2=\frac{n^2}{m^2}$，则有 $n^2 = 2m^2$．因此，存在一个边长为n的正方形，其面积等于两个边长为m的较小正方形面积的和．如果这个正方形不是边长为正整数的最小正方形，它能分成两个相同的边长为正整数的比它小的正方形，则选择比它小的一个正方形．如果更小的这个正方形还不是最小的，再选个更小的．由于这个过程必将结束，所以必定存在一个边长为正整数的最小正方形，可以分成两个同样的边长为整数的更小正方形．假设这个最小的正方形及与它面积的和相等的两个正方形如图4-11所示．现将图4-11中的两个较小的正方形拖到较大正方形的上面，如图4-12所示．这就制造了3个正方形，一个在中间，两个同样的正方形在角上．因为n和m都是正整数，这些正方形的边长都是正整数．设较大正方形的面积是A，两个较小的正方形面积为B．研究图4-12，得出 $n^2 = 2m^2 + 2B - A$，因为 $n^2 = 2m^2$，可得 $A = B + B$．面积A比n^2更小，这与图4-11描述的可分成两个正方形的最小正方形的事实相矛盾．这就是我们想要推出的矛盾之处．因此，不可能存在具有$d=\frac{n}{m}$形式，其中n、m为整数的等式．因此d不可能是有理数．希腊人确实提出了这种不可能测量的数的理论，这些数后来被称为无理数，但它们并没有被包含进其数字系统中．不管希腊人的数字符号还是算法都没有推广到它们身上．这导致最终希腊人的数字系统都不够广泛，不能表达他们的几何学．

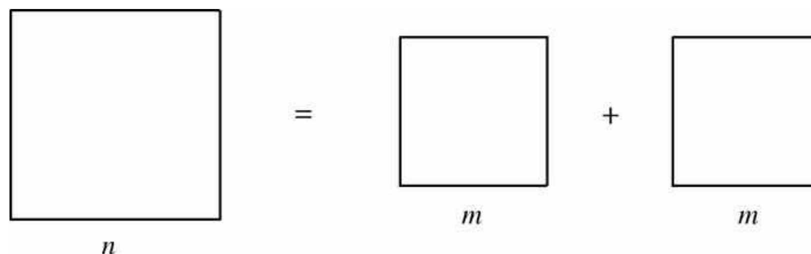


图　**4-11**

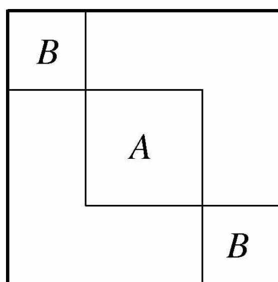


图　**4-12**

需要有一种能记录所有长度的数字系统．只有这种系统才能建立起几何学与算术和代数方面的联系．这一系统需要有一种数字符号，以便设计有效的步骤，进行加法、乘法和除法运算．从各方面看，希腊人和罗马人的方法都不满足需求．比如，考虑罗马数字

I, II, III, …, IX, X, …, XXXIV, …, LXXVI, … , XCIII, … , CCCLIX, … , MMMDCCXV, …

在罗马体系中，如果你希望将这列数字中的最后两个罗马数相乘和相除，你会发现第一种运算很烦琐，而第二种则让人恼火．

伊斯兰世界的数学家朝新数字系统的提出迈出了重要一步．公元9世纪，在巴格达工作的学者花剌子密已经采用了10个符号1、2、3、4、5、6、7、8、9和0，并用印度数学中的方法书写较大的数．用这种方法，上述罗马数字写作1, 2, 3, …, 9, 10, … , 34, … 76, …, 93, …, 359, …, 3715, …这种印度—阿拉伯数字系统是按位计数系统．符号3在数字93、34、359和3715中的意思不同，分别为三、三十、三百和三千，与它在每个数中的位置一致．花剌子密的文章指出了0的重要性，他告诉读者“当什么都没有时，放入一个小圆，使得该位置非空，该位置必须由这个圆占据”．该文的拉丁文题目为《花剌子密的印度算术》（*Algoritmi de Numero Indorum*），它告诉我们现在algorithm一词源自其作者的名字．花剌子密的另一篇论文研究方程的求解问题．其阿拉伯题目为*Hisab aljabr* . . .（指进行重分配和结合项的方法），它告诉我们现在的单词algebra也起源于阿拉伯语．伊斯兰学者提出了有效、有序的步骤或者算法来进行数字的加减乘除．其数字系统还使他们能用数字表示长度，包括边长为1的正方形的对角线长度（我们前面讨论的数字d）以及直径等于1的圆的周长（该数现用π表示）．

伊斯兰数字系统传播到西欧并被接受经历了较长一段时间．甚至一位教

皇都卷入到此系统的推广中．11世纪，教皇西尔维斯特二世还是年轻的僧侣格伯特，他所在的修道院送他从法国到伊斯兰西班牙学习数学．伟大的学习机构，如科尔多瓦大学使成千上万的学生受到高等教育．格伯特不仅学习到新的数字系统，也吸收了伊斯兰学术的怀疑和钻研精神．正是这种精神将在大约一百年后使人们建立起最早的欧洲大学．

伊斯兰数学在西欧的另一位推广者是比萨的莱昂纳多（约1175—1250年），今以斐波那契闻名．（该名字由18世纪的数学家赋予，是拉丁语filius Bonacci的缩略语，意为“波那契之子”，也有可能指“好脾气的儿子”．）莱昂纳多的父亲是一名贸易官，在现为北非国家阿尔及利亚的境内协助处理比萨商人的商业事务．年轻的莱昂纳多在那里和他一起工作，熟悉了欧几里得、阿波罗尼斯和阿基米德的数学．他向伊斯兰学者学习计算方法，学会了如何用先进方法通过9个数字以及阿拉伯语中称为zephirum的0进行计算．回去之后，他在1202年出版了《算盘之书》（*Liber Abaci*）．这本有重要历史意义的书（与书名的含义不同，它的内容与算盘没有一点关系）将伊斯兰算术和代数学引入西欧，同时还介绍了使用字母而非数字来一般化和简化代数方程的技巧．它首次向西欧系统讲解了印度—阿拉伯数字及用这些数字进行计算的方法．

人们对新系统（尚未配置小数点）的接受是缓慢的．直到1299年，佛罗伦萨的商人还被禁止用它来记账．他们被告知使用罗马数字或者用单词书写数字．历史记录告诉我们印度-阿拉伯数字于1371年出现在德国一些州的墓碑上．它们被铸在一些国家的硬币上，包括1424年的瑞士、1484年的奥地利、1485年的法国、1489年的德国州、1539年的苏格兰和1551年的英格兰．我们在1482年德国一个州所印刷的具有历史意义的托勒密地图上看到了它们（见彩图18）．在建筑领域，莱昂纳多·达芬奇在1487年设计拱顶以及1521年设计蚀刻立面图时用到了它们．（这些都跟米兰大教堂有关，见图3-28和图5-24．）

1585年，佛兰德的数学家西蒙·斯泰芬（1548—1620）出版的《论十进制》（*De Theinde*，或*The Tenth*）中提出了十进制小数，之后它便开始在欧洲使用．《论十进制》是一本29页的小册子，给出了十进制小数全面、基础的描述．其目的是给“占星师、测量员、地毯制造者、酒类征税员、造币厂厂长和所有商人”提供方便．同一年发行了它的法语版*La disme*．英语译本*Dime: The Art of Tenths*或*Decimal Arithmetic*于1608年在伦敦出版（这一译本启发托马斯·杰斐逊提议美国使使用十进制货币，而且有可能也启发了美国使用单词dime命名10分硬币．）不久，对数的

发明人之一、苏格兰人约翰·纳皮尔（1550—1617），通过取出“i上的点”，增加了小数点．这样我们的现代数字系统就完全符号化了．

有了十进制系统（以及给定的单位长度），才有可能用数字表示任何长度，而这是非常重要的一点．不管长度是有理数，即具有$\frac{n}{m}$形式，其中n、m为整数，还是如图4-10中的数字d这样的无理数，都没有关系．比如长度$5\frac{1}{4}$和$71\frac{2}{3}$可以写作5.25和71.666 6…，意为$5\frac{1}{4}=5+\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}$，$71\frac{2}{3}=71+\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{6}{10^4}\cdots$．．用同样的方法，图4-13中连续应用毕达哥拉斯定理后得到逐渐展开的螺旋线，其长度$d=\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\cdots$都能用这种系统书写．此外其他平方根、立方根和更高次根也能用十进制系统书写，比如$\sqrt{2}=1.414\,213\,562\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\,050\,808\cdots$，$\sqrt{5}=2.236\,067\,977\cdots$，黄金分割率$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\,033\,989\cdots$，π = 3.141 592 654…． 在这5个例子中，要用全部无穷数字级数才能得到等式．在任何一处停止都只能得到估计值．比如，$\sqrt{2}\approx 1.414\,21$和$\sqrt{2}\approx 1.414\,213\,56$都是估计值．（本章后面的讨论4.2将考虑这类 问题．）

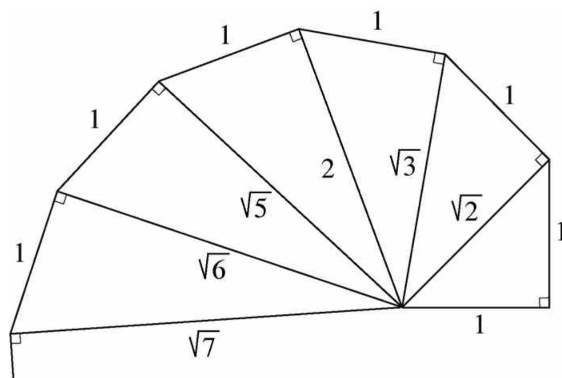


图　**4-13**

可以用这种十进制符号表达的所有数的集合，包括正数和负数，称为实数集．取单位长度和一条向两端无限延伸的直线．固定直线上的一点，记为数字0．用距离作为刻度，在0的右边标出数字1，2，3，4，…，在0的左侧标出-1，-2，-3，-4，…． 用这种方式，每个实数都对应直线上的一点，反之，直线上的每一点都对应一个实数．正数在0的右侧，负

数在0的左侧．图4-14展示了上述内容．它还展现了如何确定$\sqrt{2}=1.414\,2\cdots$的位置．标有这种数字结构的直线称为数轴．

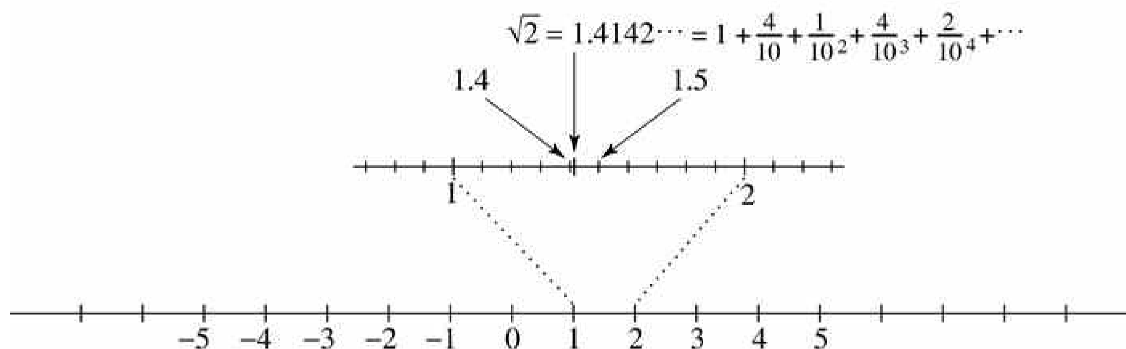


图　**4-14**

可以观察到数轴上点-5和3之间的距离为8．它等于-5-3的绝对值，或者说，等于3-(-5)的绝对值．一般地，$a \geq b$时，数轴上点a和点b之间的距离等于a-b；$b \geq a$时，等于b-a．参见图4-15．对于第一种情况，$a - b \geq 0$，因此a-b等于绝对值$|a-b|$．对于第二种情况，$a - b \leq 0$，因此$b-a=-(a-b)=|a-b|$．从而注意到a和b之间的距离总是等于$|a-b|=|b-a|$．现令$c=\dfrac{a+b}{2}$，可得

$$|a-c|=\left|a-\frac{a+b}{2}\right|=\left|\frac{2a-a-b}{2}\right|=\left|\frac{a-b}{2}\right|$$
$$|b-c|=\left|b-\frac{a+b}{2}\right|=\left|\frac{2b-a-b}{2}\right|=\left|\frac{b-a}{2}\right|=\left|\frac{a-b}{2}\right|$$

它告诉我们c点到a点和b点的距离相等．因此$c=\dfrac{a+b}{2}$是a和b之间的线段的中点．



图　**4-15**

实数系统及其符号、组织结构和运算法则由伊斯兰数学家引入，并在17

世纪由欧洲数学家扩展为坐标平面和空间（正如我们接下来要看到的）．它们打开了一条通往数学构造和计算策略的道路，具有重要意义．坐标平面及高维坐标系成为用数学建立高级结构的平台，它促进了现代科学和工程的进步．这种进步始于17世纪末，当时牛顿（1642—1727）和莱布尼茨（1646—1716）在坐标平面上奠定了微积分的基础．在接下来的两个世纪里，不断取得一些成就，到20世纪后半叶，高速计算机的发明加速了这一进程．第6章和第7章将指出这些进展以及它们对建筑的影响．

4.3 坐标平面

17世纪前半叶，两个法国人各自独立从事研究，将阿波罗尼斯和托勒密的工作进行抽象，将其变成一种研究平面曲线的强大工具．哲学家莱恩·笛卡儿（1596—1650）和律师皮埃尔·德·费马（1601—1665）取出两根互相垂直的数 轴，将其放在欧氏平面中，对它们进行调整使得数轴的两个0点重合．这就建立起了所谓的直角坐标系或笛卡儿（纪念笛卡儿）坐标系．

本节从详细描述坐标系开始，接着转而研究建筑师为完成设计在平坦纸面上所绘制的直线和圆的标准抽象．

在一个平面内放两根由同样单位长度构造的数轴，使它们在各自的0点相交，并且互相垂直．由这样的一对数轴构成的平面即为坐标平面．我们称其中一条线为x轴（一般水平放置），另一条线为y轴（一般垂直放置）．（当然，也可以用其他方式标记这两根数轴．）现令P为平面内的任一点．画一条过P点平行于y轴的直线．这条直线与x轴交于一点，该点与数轴上的数字，如a相对应．数字a称为P点的x坐标．用同样的方式过P点作平行于x轴的直线，它与y轴相交，交点对应于数b，则b为P点的y坐标．我们说P是坐标为$(a，b)$的点，一般用(a, b)代替P点．反之，我们可以从一对数，比如(c, d)开始，到达一个坐标为(c, d)的点，如R．图4-16展示了上述这种双重关系．点S对应坐标(3,-3.2)，则有S = (3, -3.2)；数字2和$4\frac{1}{2}$确定点$Q=(2,4\frac{1}{2})$．点(0, 0)称为原点，记为O．如果只关注x轴或y轴，则该点用符号0（零）表示．

考虑变量为x和y的任一方程．设x=a，y=b，方程的图形是指平面内满足该方程的所有点$(a，b)$的集合．很容易检验点$(1,\frac{1}{2})$在$x^2 + 4y^2 - 2 = 0$的图形上，点(2, 1)在$4x^3-27y^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{y^2}=10$的图形上．我们将考虑的方程图形一般为曲线（本章和后续章节），如直线、圆、抛物线和椭圆．如果平面内一条曲线是一个方程的图形，我们把这个方程称为该曲线的方程．

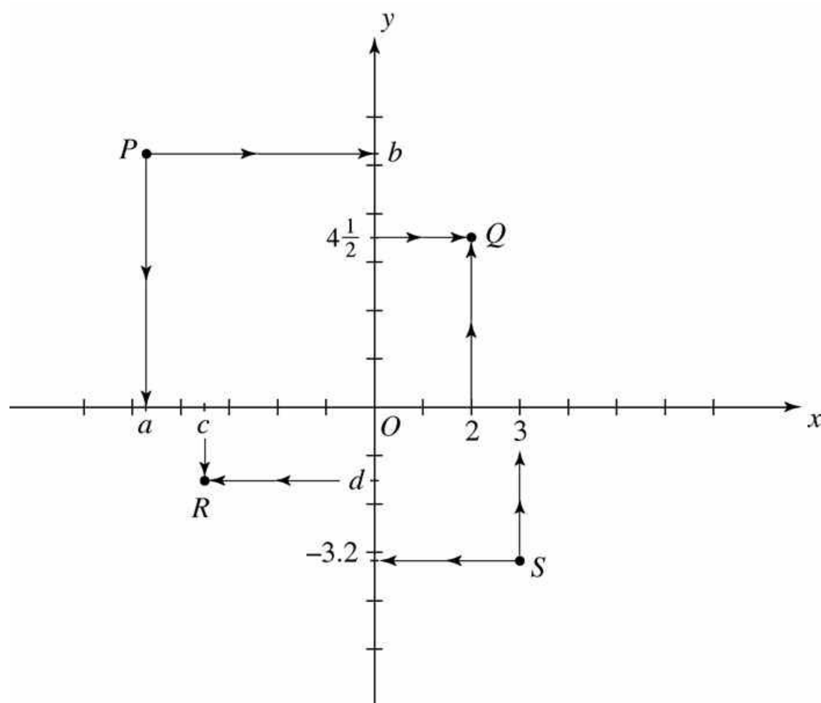


图　**4-16**

我们回头研究直线．先从图3-13中旧圣彼得大教堂的屋顶开始．图4-17展示了屋顶的截面图，它由两根斜线段*AB*和*BC*组成．注意线段*AB*．垂直高度*b*与长度*a*的比值$\frac{b}{a}$是屋顶线段*AB*的坡度或者斜率．它是线段*AB*升高的速度．对*a*而言，*b*越大，则屋顶越陡，斜率$\frac{b}{a}$越大．而*BC*的斜率呢？它同样是垂直高度比长度，为$\frac{b}{a}$，但从左到右，屋顶是下降的．因此，我们定义*BC*的斜率为$-\frac{b}{a}$．举例来说，如果*a*=15英尺、*b*=9英尺，则*AB*的斜率为$\frac{b}{a}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}=0.6$，这样水平方向每增加一英尺，屋顶线段*AB*就以0.6英尺的速度升高．线段*BC*的斜率为-0.6．水平方向每增加一英尺，这条屋顶线段就下降0.6英尺（或者说以-0.6的速度升高）．

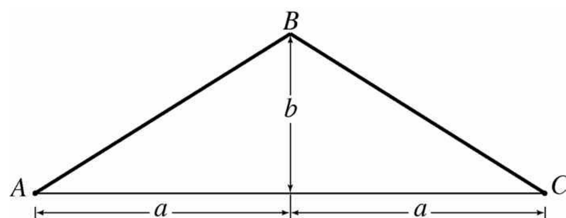


图　**4-17**

注意首选从左到右方向的重要性．在西方文明（而非所有文明）中，一般首选这一方向．书写时，我们从左到右进行．在水平数轴上排列数字时，按从左到右递增的顺序，也反映了这一倾向．

将xy坐标系加到图4-17的平面内，将屋顶线段AB和BC向两端延长，得到直线 L_{AB} 和L_{BC}．令 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 是 L_{AB} 上的两个截然不同的点．参见图4-18，可以观察到P_1和P_2所确定的三角形与三角形ABO相似．因此对应边的比值相等，于是有

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b}{a}$$

现在转向直线L_{BC}．令$P_3(x_3,y_3)$和$P_4(x_4,y_4)$是L_{BC}上的两个截然不同的点．再次根据相似三角形的性质，有$\frac{y_4-y_3}{x_3-x_4}=\frac{b}{a}$，或者

$$\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=-\frac{b}{a}$$

将刚推导的这两个等式与之前对旧圣彼得大教堂的观察相结合，可知应该按下面的方法定义xy平面内直线L的斜率．在L上选择任意两个截然不同的点$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$，定义L的斜率为比值

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

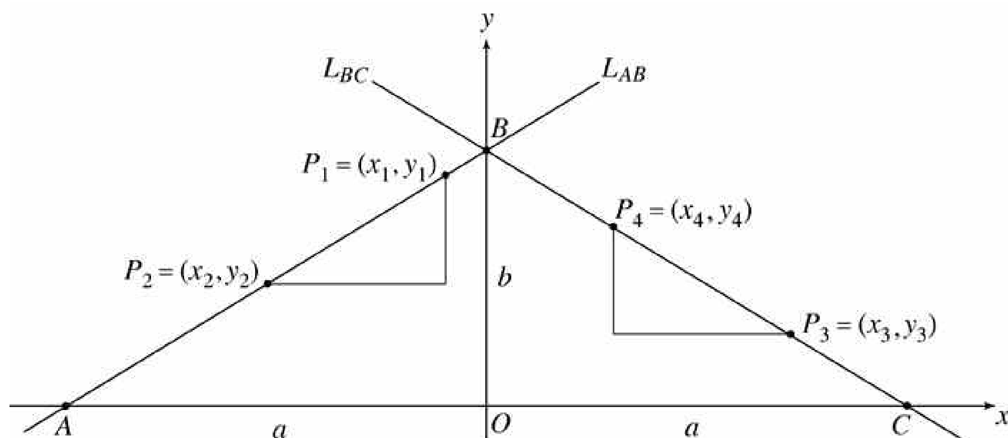


图　**4-18**

我们已看到对直线 L_{AB}，不管如何选择这两个点，斜率的值都相同（即 $\frac{b}{a}$）．同样对直线L_{BC}，斜率也总是$-\frac{b}{a}$．出于同样的原因，对任一直线L也是如此．不管L上的两个不同的点如何选择，斜率的值都相同．如果L垂直，则会存在一个问题．此时 $x_1 = x_2$，因此该斜率无法定义，故垂直直线没有斜率．如果L水平，则$y_1 = y_2$，因此L的斜率为0．

在图4-19中，L为斜线，$P_1(x_1,y_1)$ 和$P_2(x_2,y_2)$ 为L上两个不同的点．令L的斜率为m，则有$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$．现设 $P = (x,y)$ 为平面内不等于P_1的任一点．注意如果L和线段P_1P的斜率完全相等，则 $P = (x,y)$ 在L上．因此如果过P_1和P点的直线的斜率恰好等于m，则 $P = (x,y)$ 点在L上．因此若恰好$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$或者换一种写法$y-y_1=m(x-x_1)$，则点 $P = (x,y)$ 在L上．当 $x = x_1$ 和 $y = y_1$ 时，该方程依然满足（因为方程两边均为0）．这样可得如果点(x,y)恰好满足公式．

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

则它在直线L上．这种方式列写的直线L的方程称为点斜式方程．将L的点斜式方程重新写为$y=mx+\left(y_1-mx_1\right)$．令$b=y_1-mx_1$，方程变为

$$y = mx + b$$

因为该直线从点(0, b)横穿y轴，称数字b为y截距，L的方程$y = mx + b$为斜截式方程．将$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$代入点斜式方程，得到

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

这是两点式方程．

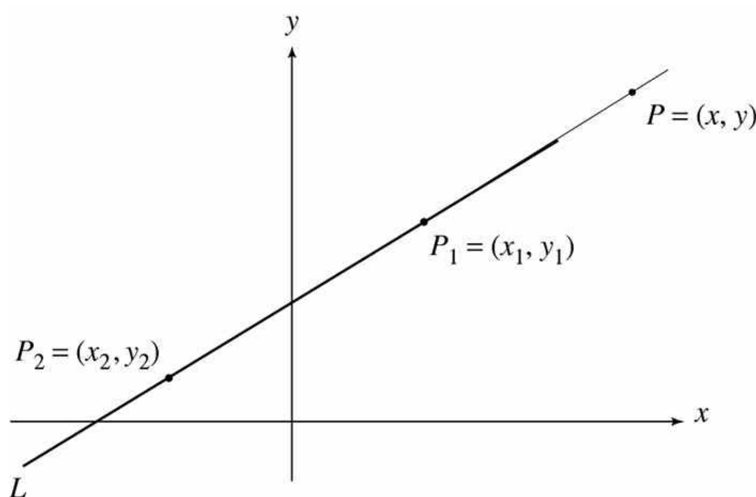


图　**4-19**

下面该举几个具体例子．考虑点(-2，3)和(4，1)确定的直线L．$y - 1 = \left(\frac{1-3}{4-(-2)}\right)$($x$ - 4)为L的两点式方程．该直线的斜率为$\left(\frac{1-3}{4-(-2)}\right) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$．　$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 4)$和$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - (-2)) = -\frac{1}{3}(x + 2)$均为$L$的点斜式方程．根据后一方程，我们可以得到$L$的斜截式方程$y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$．

斜率为$\frac{5}{4}$、经过点(7, -3)的直线其方程为$y + 3 = \frac{5}{4}(x - 7)$．这是点斜式方

程．它可以重写为$y=\frac{5}{4}x-\frac{35}{4}-3=\frac{5}{4}x-11\frac{3}{4}$，为$L$的斜截式方程．

因为垂直线没有斜率，它们的方程表达形式不同．例如，考虑过x轴上一点3的垂直线．该直线是所有具有(x, y)形式且x=3的点的集合．因此x=3即为该直线的方程．同样，过x轴上x_0点的垂线方程为$x = x_0$．

直线的方程可以精确地确定该条直线．例如，由点(-2,3)和(4,1)确定的直线L具有方程$y=-\frac{1}{3}x+2\frac{1}{3}$，这告诉我们只有坐标满足该方程的点才位于$L$上．比如，点$(0,2\frac{1}{3})$在$L$上，点(0,2.333 3)非常接近但并不在该直线上．

研究完线，我们现在转到圆．二者研究的关键是确定两点间的距离公式．

考虑平面内的任意两点$P = {}_1(x_1,y_1)$和$P_2 = (x_2,y_2)$，如图4-20所示．根据上一节最后作出的观察，两点的x坐标间的距离为$|x_1-x_2|$，y坐标间的距离为$|y_1-y_2|$．则线段P_1P_2为图4-21中直角三角形的斜边．根据毕达哥拉斯定理，$P_1P_2=\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2}$．该方程反映了一种我们正在使用的表示方法．即当线段的表示形式，如P_1P_2出现在数学公式中时，它代表该线段的长度．由于$|x_1-x_2|^2=(x_1-x_2)^2$且$|y_1-y_2|^2=(y_1-y_2)^2$，$P_1 = (x_1,y_1)$和$P_2 = (x_2,y_2)$间的距离等于

$$p_1p_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

这就是平面内两点间的距离公式．

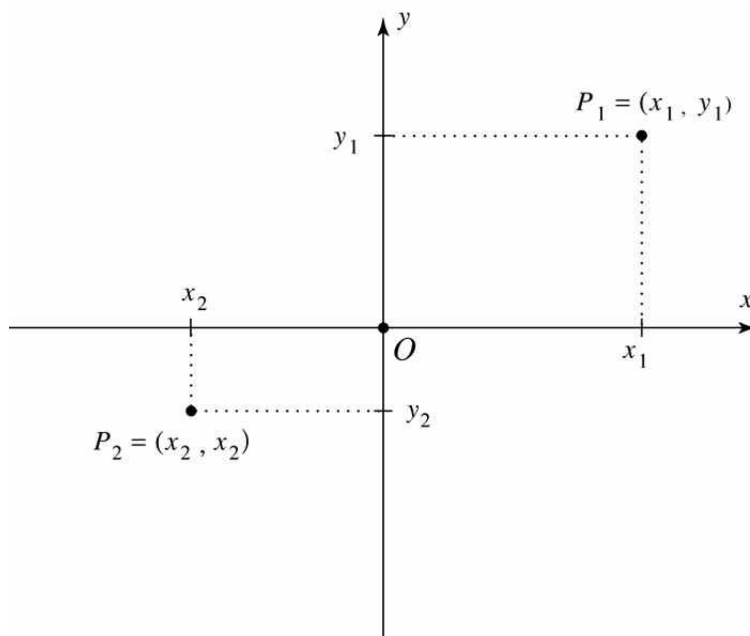


图　**4-20**

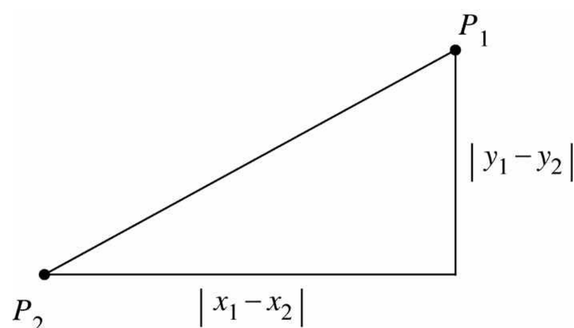


图　**4-21**

例如，(1,-2)和(5,3)间的距离为$\sqrt{(1-5)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$．因为$\sqrt{(5-1)^2+(3-(-2))^2}$也等于$\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，正如所预料的，两点的顺序对结果没有影响.

我们很容易用距离公式验证点 $P_1 = (x_1,y_1)$ 和 $P_2 = (x_2,y_2)$ 所确定的线段的中点为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

考虑圆心为 $C = (3,2)$、半径为4的圆．图4-22表明如果从平面内一点 $P = (x,y)$ 到圆心(3,2)的距离恰好等于4，则该点在这个圆上．根据距离公式，当 $PC = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 4$，$P = (x,y)$ 就正好在圆上．两边进行平方，该条件等价于

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

这就是圆心为(3,2)、半径为4的圆的方程．用同样的方法，得

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

这是圆心为(h,k)、半径为r的圆的方程．它是圆的标准方程．圆心为原点 $O = (0,0)$、半径为r的圆的标准方程为 $x^2 + y^2 = r^2$.

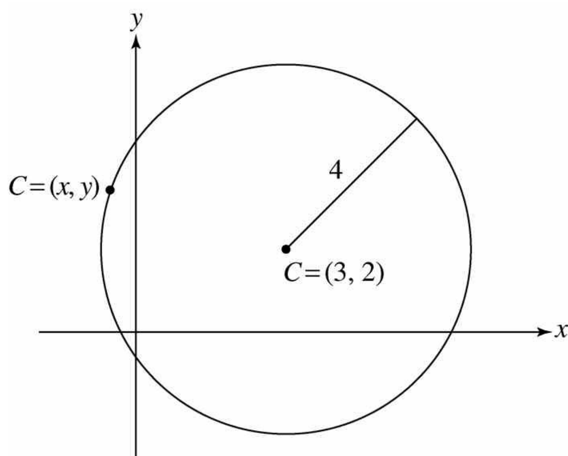


图　**4-22**

圆的方程准确确定该圆．考虑圆心为(2,-5)、半径为3的圆，其标准方程为 $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$．验证 $(2+2\sqrt{2},-4)$ 是圆上的一点．为什么点(6.8284,-4)非常靠近该圆却不在圆上？

4.4 三维坐标系

坐标平面的发明人笛卡儿和费马都认识到坐标系也能用来构造我们所居住及建筑师所建造的三维空间．本节解释如何进行构造这种三维空间．

先从含有xy坐标系的平面开始，令O为原点．过O点作垂直于该平面的第三根数轴数轴（用与其他两根数轴同样的单位长度构造），我们称为z轴．上述的构造如图4-23所示，称为xyz坐标系．每个轴的正半轴用带箭头的实线表示，负半轴用虚线表示．xy、xz和yz平面是该坐标系的坐标平面．取空间内的任一点P．将其沿平行于z轴的方向平移到xy平面内，设(x_0,y_0)为该点的坐标．设从P点到xy平面的距离（或者若P在xy平面下方，则为该距离的负数）为z_0．数字x_0、y_0和z_0是P的x、y和z坐标．因为x_0、y_0和z_0确定P的位置，我们记为 $P = (x_0,y_0,z_0)$．将P点沿平行于y轴的方向平移到xz平面，(x_0,z_0)为所获得的点的坐标．将P点沿平行于x轴的方向平移到yz平面，得到点(y_0,z_0)．图4-23用图展示了上述内容．从点P可以得到其坐标x_0、y_0和z_0，这一过程也可以反过来．例如，按如下方法用3个数(2,-3.4)确定空间内的一点．先从xy平面内的(2,-3)开始．从它开始沿z轴方向向上移动4个单位．用这种方法，由数字(2,-3.4)得到一个点．根据确定点的方法，可知该点的x、y和z坐标分别为2、-3和4．用这种方法，任何3个数都能确定空间内的一点．

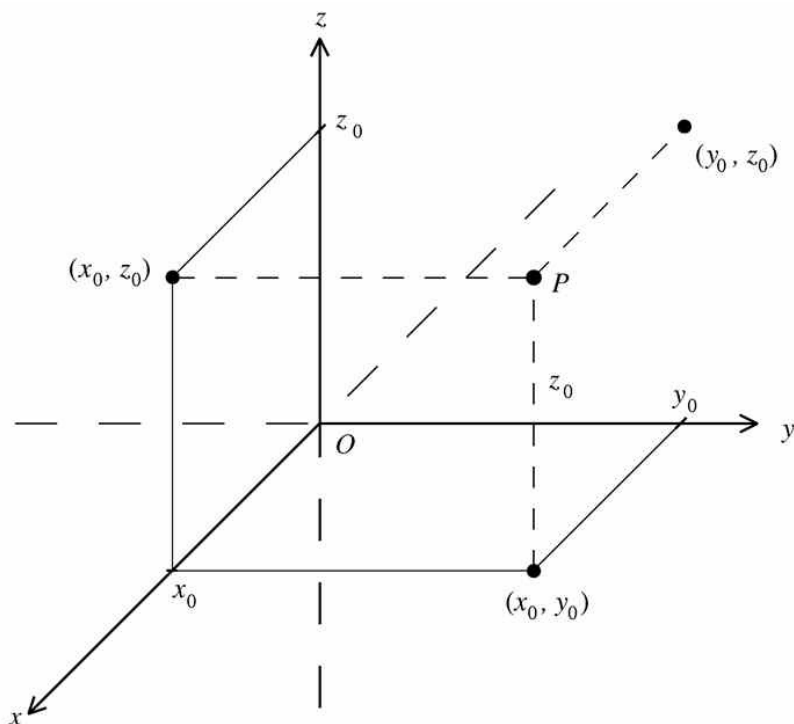


图　**4-23**

用我们在坐标平面内所做的工作作为参考模型，定义变量为x、y和z的方程的图形为空间内所有满足该方程的点(x,y,z)的集合．这种方程的图形是空间几何形状，通常为曲线或曲面．如果一个曲线或曲面是变量为x、y和z的方程的图形，则我们称这一方程为曲线或曲面方程．

例如，令a、b、c和d为常数，考虑方程

$$ax + by + cz = d$$

它的图形是什么样的？让我们先看一些特殊情况．具有$(x,y,0)$形式的所有点满足方程$z=0$（令$a=b=d=0$和$c=1$即可获得），其中x和y可以取任意值．而这就是xy坐标平面．当$z=3$时会如何？满足该方程的点都具有$(x,y,3)$的形式．这是与xy平面平行且在xy平面上方3单位长度的平面．你能描述一下$x=0$、$x=7$、$y=0$和$y=-5$的平面吗？考虑下一个例子 $3x + 4y + 0z = 5$．求解 $3x + 4y = 5$ 中的y，得$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$，它是$xy$平面内斜率为$-\frac{3}{4}$、$y$截距为$\frac{5}{4}$的直线．满足 $3x + 4y + 0z = 5$ 的点是具有(x,y,z)形式的

点，其中(x,y)位于xy平面内的直线$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$上，$z$可以取任意值．因此 $3x+4y+0z=5$ 的图形是过直线$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$、垂直于$xy$平面的平面．

最后，来看一下常数a、b、c或d均不等于0的情况．同样，满足 $ax+by+cz=d$ 的点的集合是一个平面．是哪一平面呢？令$y=z=0$，求解x，可知点$(\frac{d}{a},0,0)$满足这一方程．点$(0,\frac{d}{b},0)$和$(0,0,\frac{d}{c})$也满足对应的方程．可以证明满足 $ax+by+cz=d$ 的点的集合是由图4-24中的三角形所确定的平面．图中的例子，a、c和d为正，b为负．除了$a=b=c=0$的情况，方程 $ax+by+cz=d$ 的图形是一个平面．如果$a=b=c=0$，又会发生什么情况？

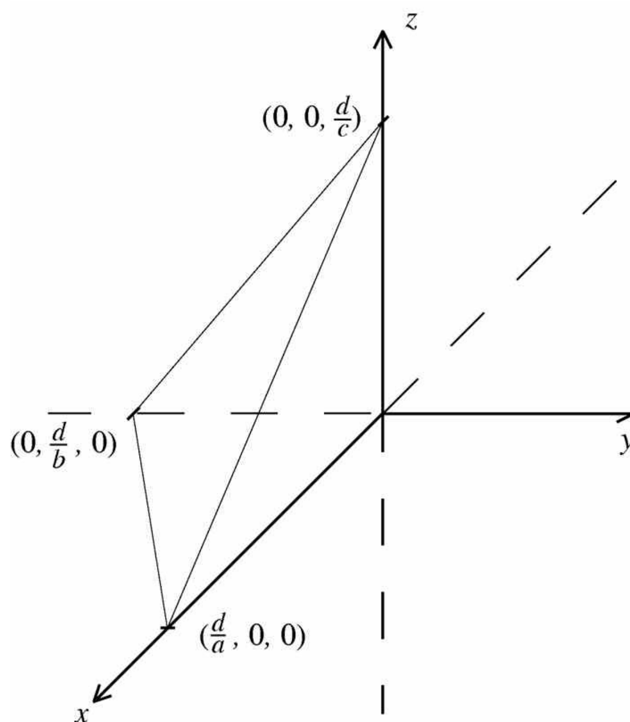


图　**4-24**

看另一个例子．将 $x^2+y^2=r^2$ 看成变量为x、y和z的方程，将其写作 $x^2+y^2+0z=r^2$，显然它对z没有一点限制作用．这样z可以为任意值，它的图形包含所有满足 $x^2+y^2=r^2$ 的点(x,y,z)．这是一个无限长的圆柱，其中心轴为z轴，圆柱经过xy平面上的圆 $x^2+y^2=r^2$．

我们下面研究空间内两点间的距离公式．设给定点 $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$．将 P_1 点 P_2 和沿z轴方向平移到xy平面内，得到xy平面内的点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)．设Q为点 $Q = (x_2,y_2,z_1)$，如图4-25所示．注意P_1和Q之间的距离与 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 的距离相等．根据平面内距离公式，这两点的距离为

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

P_2和Q之间的距离为$|z_2 - z_1|$．（图4-25中，z_2恰好为正，z_1为负，因此距离为$z_2 - z_1$．）将毕达哥拉斯定理用于ΔP_1QP_2，得

$$(P_1P_2)^2 = \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)^2 + |z_2 - z_1|^2$$

这样 $(P_1P_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$，因此有

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

这就是空间内两点间的距离公式．

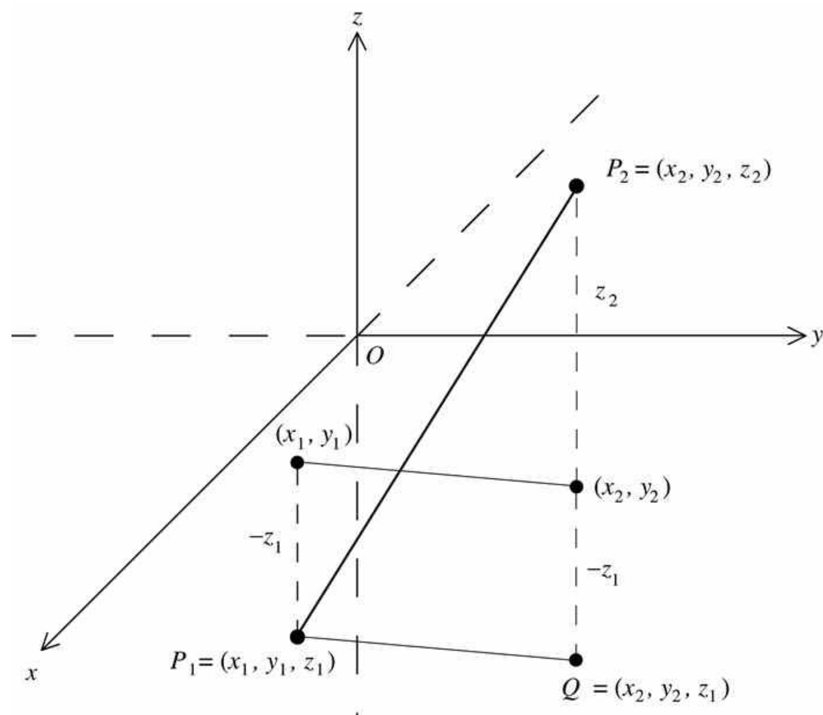


图　**4-25**

假设点 $P = (x,y,z)$ 与点(1,-2,3)的距离为4．根据距离公式，可知 $\sqrt{(x-1)^2+(y-(-2))^2+(z-3)^2}=4$，因此有

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4^2$$

可得球心为(1,-2,3)、半径为4的球面方程．用同样的方法，有

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

它是球心为(h,k,l)、半径为r的球面方程．这也是球心为(h,k,l)、半径为r的球的标准方程．

让我们回顾第3章和圣索菲亚大教堂的穹顶．参见图3-3，建立xyz坐标系，使 $O = (0,0,0)$ 为决定壳内外表面的球的公共球心，使z轴是穹顶的垂直中心轴．回忆一下，穹顶内表面的半径为50英尺，考虑球 $x^2 + y^2 + z^2 = 50^2$．图4-26绘出了上半球．将图3-3中的20°角放到该图中，设z_0为这个角所确定的三角形的高．注意 $\sin 20^\circ = \frac{z_0}{50}$，这样 $z_0 = 50\sin 20° \approx 17$．

可以注意到一排40个窗户上方的穹顶内表面的数学模型是平面 $z = z_0$ 上方的球面．为了确定这个球面底边的圆，把 z_0 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 50^2$，得 $x^2 + y^2 + z_0^2 = 50^2$，即 $x^2 + y^2 = 50^2 - z_0^2$．因为 $50^2 - z_0^2 \approx 50^2 - 17^2 = 2211$，所以上面的方程代表圆心为$(0,0,z_0)$、半径为$\sqrt{50^2 - z_0^2} \approx \sqrt{2211} \approx 47$英尺的圆．

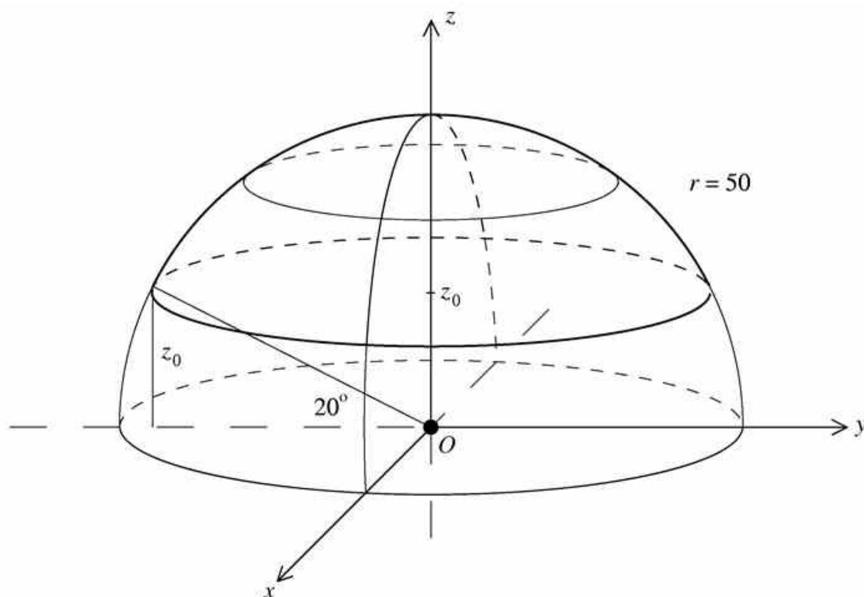


图　**4-26**

这个数学模型很可能是对16世纪圣索菲亚大教堂穹顶内表面的精确估计，但却只是如今它的内表面的粗略估计．回顾一下第3章，穹顶的各种重建工作使它的球面几何形状产生改变．尤其是，它的底部现在是一个椭圆（见图3-6）．

本节和前一节都阐述了坐标系在代数学和几何学之间建立的对应关系．对给定的代数方程（有2个或3个变量），图形给出了直观的变量关系．另一方面，当给定的曲线或曲面是某方程的图形时，对该方程的代数分析能够揭示出该曲线或曲面的数值和几何学信息．

4.5　佛罗伦萨大教堂

1296年，欣欣向荣的佛罗伦萨城开始建造一座大教堂，想要在庄严优美方面胜过托斯卡纳地区的竞争对手比萨和锡耶纳．圣母百花大教堂意为“花之圣母”，有一间矩形中殿和3间半八角形的后殿，中殿的拱顶是哥特式，内含拱肋．它的设计中最独特的地方是要求建一座巨大的穹顶，高耸在十字交叉处的上空．14世纪前半叶，施工进行得很慢．但到了1418年，耳堂已完成，耳堂的两个后殿也已用半穹顶遮盖，还建好了要在上面竖立穹顶的巨大八角形鼓座，如图4-27所示．该鼓座由沉重的哥特式拱和巨大的墩柱交替支撑．它由有弹性的砂岩建成，墙壁厚达4.6米．它的内八角形横截面直径为44.2米，上边界距离教堂的地面约为54.9米．

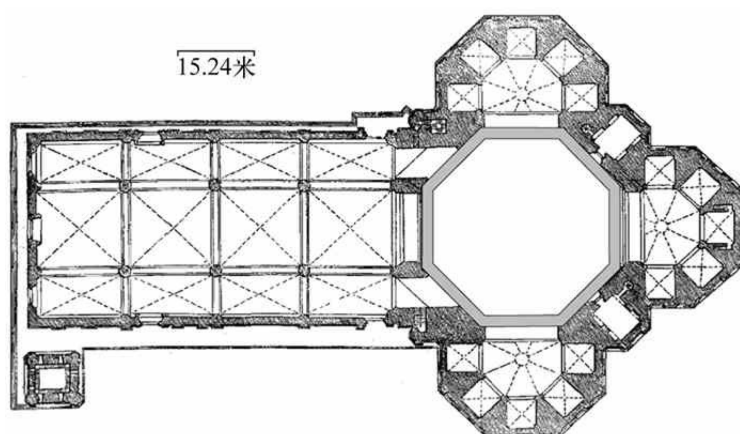


图**4-27**　有**3**个后殿和八角形鼓座的圣母百花大教堂平面图

到了用穹顶盖住八角形开口的时候了．1418年，指导大教堂建造的大教堂歌剧院委员会宣布举行穹顶设计和施工大赛．其中几个结构方面的问题已经确定．鼓座的尺寸决定了穹顶底面的大小，鼓座的形状意味着从底面竖立的穹顶横截面为八角形．但是，最让人望而却步的问题还没有解决．由砖、石、灰泥或混凝土建造的穹顶能达到44.2米的跨距吗？能建造一个传统的木拱鹰架结构，使它从地面到鼓座延伸54.9米并在施工过程中支撑穹顶吗？它是可行的吗？更糟糕的是，歌剧院宣布巨型外部扶壁很难看，并命令不能有这样的结构．但没有巨型外部扶壁，怎么限制大型砌筑穹顶必定会造成的相当大的环向应力呢？毫不夸张地说，建造这一穹顶遇到的难题没有任何先例可循．即使有先例，也一点都不清

楚其是如何建造的．歌剧院采用的策略与建造米兰大教堂的建筑委员会相同，即“先建造，等时机成熟，再解决下一个问题”（见3.5节）．

菲利波·布鲁内莱斯基（1377—1446）响应了歌剧院的公告．他是受过训练的金匠，但曾花大量时间参观罗马，研究古代罗马建筑的砌筑结构、施工技术以及建造拱顶的方法．布鲁内莱斯基给歌剧院提交了一个模型，用来表达他的概念和实践．他用模型作为实验品来验证他的施工方法．在规划大型结构时使用比例模型非常普遍，其历史可追溯到古代．他的模型由木头、砖和灰泥制成，规模足够大，委员会的成员可以在里面行走并检查它的内部．穹顶的中心垂直截面是哥特式尖拱．这种设计的坡度较大，可减小沉重的穹顶所产生的向外的侧推力．布鲁内莱斯基的穹顶设计要求内外都是砌筑壳．结构坚固的内壳会支撑并受到较薄外壳的保护，外壳会给穹顶带来挺拔的外形．布鲁内莱斯基的建议中最激进、最引发争议的是这一观点，即建造穹顶时不必使用从地面竖起进行支撑直到施工完成才去掉的拱鹰架结构．歌剧院心存疑虑，但最终还是被打动了．1420年，歌剧院认命布鲁内莱斯基作为两个主建筑师中的一个，领导施工．

同一年开始实施穹顶工程．记录显示任何时候所雇佣的工匠，包括石匠、砖匠、泥水匠和木匠，其数目都要少于100人．这个数目没有包括体力劳动者．优先考虑的工作是制作用于移动和举起建筑材料的升降机和起重机．可能受维特鲁威关于罗马人用来建造大型结构的机器的描述的启发，布鲁内莱斯基发明了一种大型的升降机，根据后来人们的评论，这种升降机使得“只用一头牛就能举起之前……【可能】需要6对牛拉才能举起的重量”．主升降机放在地上，由套上轭的几队牛或马拉动．它包括一个大型木框架和一系列新颖的木滑车、齿轮、传动装置、平衡物和用来缠绕或释放粗绳的转动卷轴．它能举起重达几千磅的负载．起重机用木杆、转动的水平横梁和可调节的平衡物建造，与现代建筑用起重机的运行很像．它们被设计成高踞在由穹顶已完成的墙壁结构所支撑的工作平台上，可以将建筑材料运送到施工地点．根据后来人们的评论，布鲁内莱斯基将佛罗伦萨亚诺河岸附近的一大片地方清空并压平．通过拉伸和转动绳索，工人能在沙上绘出穹顶及其构件的等比例平面图．穹顶石头拱肋和其他部件的模板可能就是用这样巨大的图制成的．

穹顶的施工过程依赖于3种关键操作：控制不断增高的外形、升高工作平台和连续垒砌环形的砖层．利用图4-28，我们先抽象地看一下工人如

何保证穹顶向上弯曲的几何形状．它的几何学关键是八边形鼓座的内边．取一个xy坐标平面．考虑单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 并取4个点 $S_1 = (1,0)$、$S_3 = (0,1)$、$S_5 = (-1,0)$和 $S_7 = (0,-1)$．4个点 S_2、S_4、S_6和 S_8 为该圆与两条直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 的交点．因为轴线与直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 的夹角都等于45°，则这8个点是正八边形的顶点．这个八边形代表鼓座的内边．点M是连接 S_3 和 S_4 的线段的中点．灰色线段代表从 S_1 伸到M的绳子．

绳子的长度很重要．为了计算它，先求得 $S_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，再用坐标平面一节中的中点公式得

$$M = \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}+0}{2}, \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$$

根据本节提出的距离公式，得到绳子的长度为

$$\begin{aligned} S_1M &= \sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right)^2 + \left(0-\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(4\times 2+4\sqrt{2}+1)+(1+2\sqrt{2}+2)}{(2\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{12+6\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6(2+\sqrt{2})}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1.600\,206\cdots \approx 1.6 \end{aligned}$$

让绳子固定在S_1 点，转动点M，得到x轴上的点C_1．注意

$$\frac{S_1C_1}{S_1S_5} = \frac{S_1M}{S_1S_5} \approx \frac{1.600}{2.000} = \frac{4(0.4)}{5(0.4)} = \frac{4}{5}$$

则点 C_1 非常靠近从 S_1 到 S_5 间路径的 $\frac{4}{5}$ 处．接着将绳子放在 S_5 处，朝 S_1 拉伸，得到点 C_5．和上面一样，$\frac{S_5C_5}{S_1S_5} \approx \frac{4}{5}$，则 C_5 非常靠近从 S_5 到 S_1 间路径的 $\frac{4}{5}$ 处．

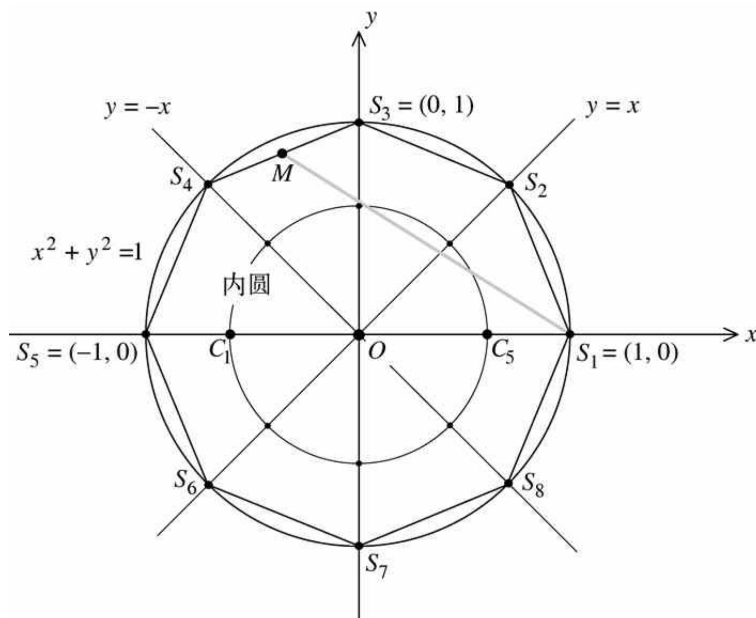


图　**4-28**

将绳子的一端固定在 C_1 点，另一端拉到 S_1，然后将绳子的这一端垂直向上转动．接着将绳子固定在 C_5 点，从 S_5 点垂直向上转动．用这种方法得到垂直平面内的一个拱，它包括交于一点的两个圆弧．点 S_1 和 S_5 为它的起拱点，C_1 和 C_5 为两个圆的圆心，T为它们的交点．图4-29(a)对此作出了演示．因为 S_1 到 C_5 及 S_5 到 C_1 的距离是 S_1 和 S_5 间距离的 $\frac{1}{5}$，该拱被称为哥特式$\frac{1}{5}$尖拱，即意大利语quinto acuto．接下来，对线段 S_2S_6、S_3S_7 和 S_4S_8 做同样的处理，又得到3个形状为哥特式五分之一尖拱的拱，每个拱都位于自己的垂直平面内．这4个拱从鼓座内八边形上的起拱点 S_1、S_2、…、及 S_8 处升起，均匀分布的4个拱确定了穹顶的内表面．这个表面有8块板子，每个板子在水平方向是平的，从八边形的8条边竖起．板子向内部弯曲，交于点T，如图4-29(b)所示．垂直的中心轴z轴为4个尖拱所确定的垂直平面的交线．内壳的哥特式五分之一尖拱还规定了它的外部的几何形状．与万神殿和圣索菲亚大教堂扁平的穹顶不同，圣母百花大教堂的穹顶直指天空．

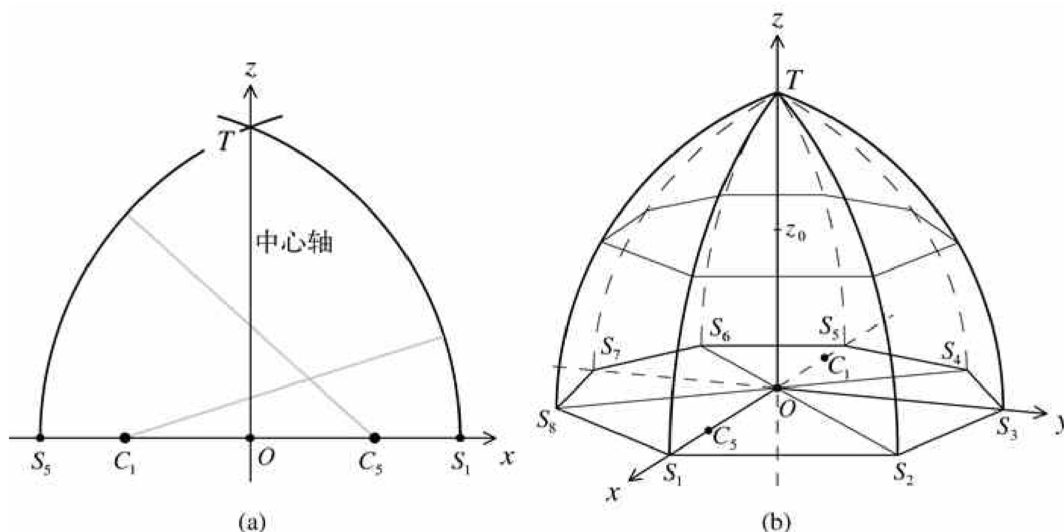


图 **4-29**

布鲁内莱斯基让工人搭建了一个平台，它从图4-28中的鼓座边界向内伸出直到内圆．该平台的底部由固定在鼓座墙上的部分拱鹰架支撑，上边则由绳子拉住，绳子系在砖墙内锚接的铁环上．工人正是从这个平台上伸出corda da murare，即“建筑用细绳”来确定8块不断增高的穹顶内表面的曲面几何形状．鼓座的内侧并非完美的八边形．它的8条边各不相同，最长的17.2米，最短的16.6米．这也使得8块弯曲的板子的形状也各不相同．

穹顶两个壳的8个面很快开始增高，它们的形状受8个内表面的限制．两个壳在开始的20英尺左右，由琢石建造（琢石是指切割成矩形的大石块），之后则由比较轻的砖建造．琢石和砖都由灰泥粘合在一起．工人分成8组，这样两个壳的8个面就能同步进行建造，一次砌完一圈八边形．在砌这圈砖的过程中，需要对砖和灰泥结构进行支撑，以免其向里倒塌．但是，砌完一圈砖层后，它自身就是稳定的，受四周的壳挤压，不会移位．每砌完一圈砖后，不断增高的穹顶也是稳定的，不考虑圆孔，其稳定的方式几乎与万神殿相同．布鲁内莱斯基在提出不需要复杂的拱鹰架结构就能建造穹顶时就清楚这一点．穹顶使用了几种不同尺寸和形状的砖，包括矩形、三角形和鸠尾状砖以及带突起的砖等，总共有几百万块．为了让不断增高的双层壳更稳定，砖块以带水平箭头和向上螺旋线的联锁人字形图案排列．图4-30展示了两个壳内表面的砖结构，让我们看到了这一图案．

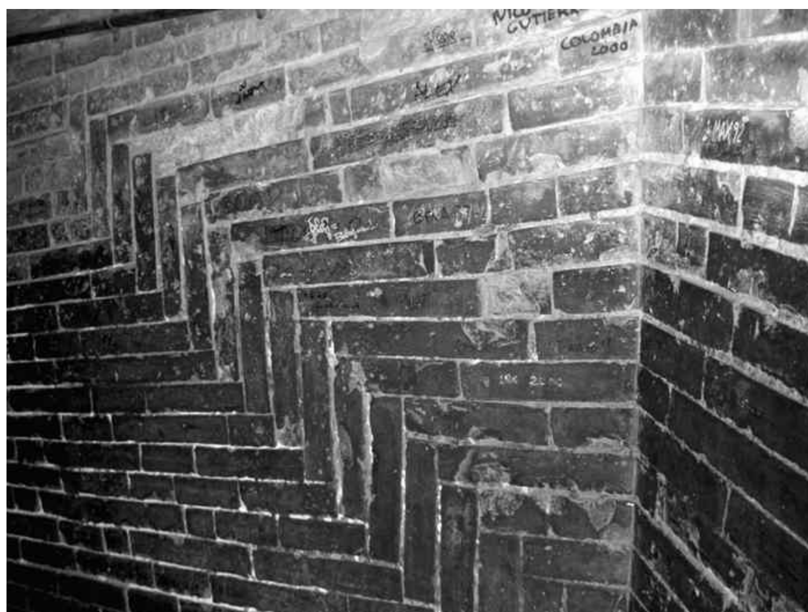


图**4-30**　两个壳内的人字形砖砌图案，**Philip Holtzman**和**Rose Holtzman**摄

鼓座附近，内壳的厚度约为2.3米，外壳的厚度约为0.8米，二者相差约1.2米．两个壳的厚度随着穹顶的增高而减小，但它们之间的厚度差距则不断增加．两个壳由24根砌筑体拱肋系统连接，称为支墩．两个壳之间的这些支撑部件从基座附近开始，一直到顶部都有．八边形壳的8个角，每个上面都有一个角支墩，每条边还有两个中间支墩．图4-31是穹顶的水平剖面，展现了这些结构．每条边的支墩厚度从较低处的约1.8米到较高处的约0.5米不等．在角落处的支墩厚度是其两倍．穹顶的主要结构构件是9个不同高度的结实的石拱券系统，它们都位于穹顶上部$\frac{2}{3}$的地方，起到加固角支墩附近外壳的作用．它们在角落处最厚，越向两边越细，直到与两个中间支墩连在一起．图4-31在切割时穿过了这样的一组拱券．

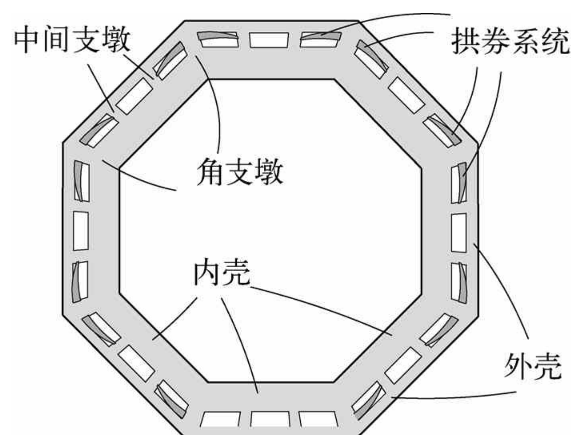


图**4-31**　穹顶的水平截面图

4对砂岩链环绕着穹顶的壳，对它进行加固．它们由9英尺的矩形砂岩块制成，由铁钳夹在一起．除了石链，还有栗木梁制成的木链，由橡木段加固，用铁钉钉在一起．图4-32中穹顶的垂直截面图展现了鼓座和两个壳．该图标表明加强链和9组石拱券的位置．它还给出了一些结构部件距离教堂地板的高度．

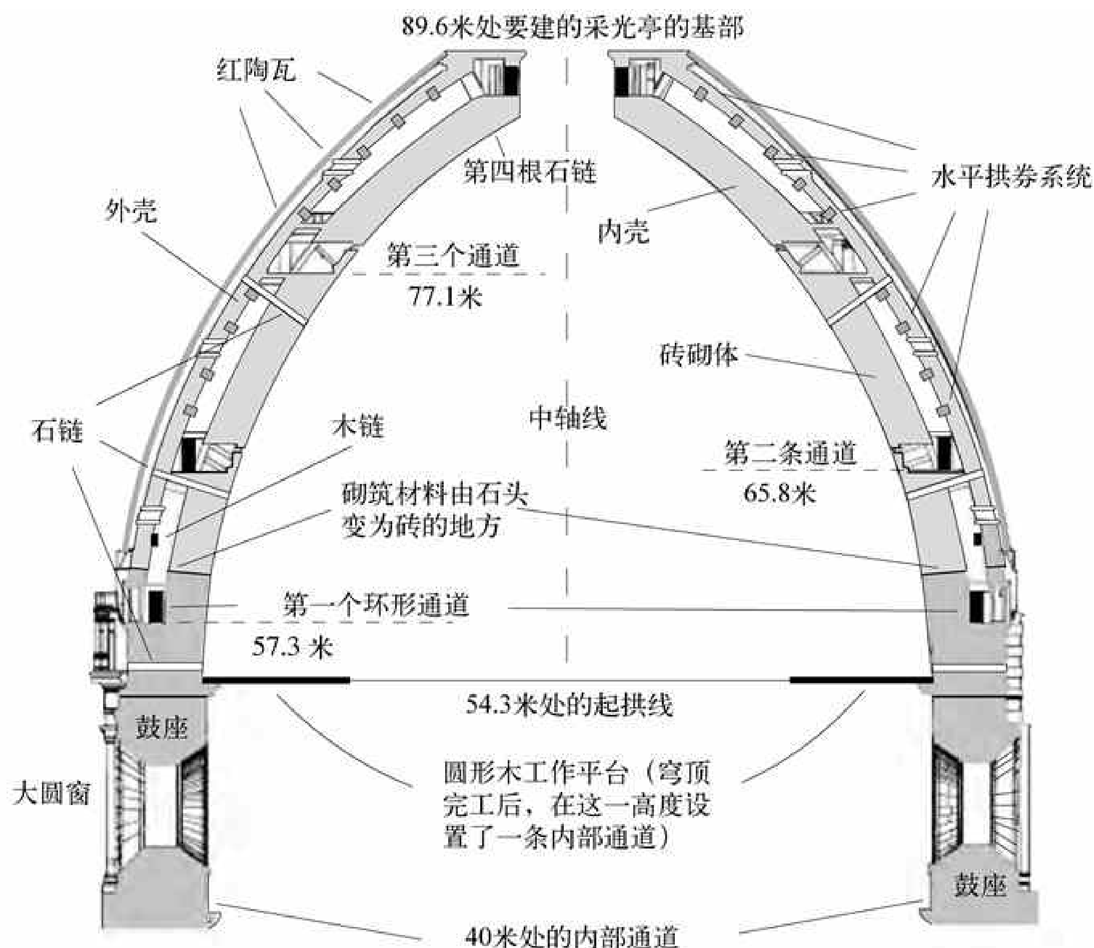


图**4-32**　过中轴的穹顶垂直截面图．改自**G. Fanelli**和**M. Fanelli**的《布鲁内莱斯基的穹顶：一座建筑杰作的过去和现在》（***Brunelleschi's Cupola: Past and Present of an Architectural Masterpiece***），**p180-181**

穹顶于1436年建造完成．外壳的8块板子外面铺了30 000块宽38.1厘米、高50.8厘米的红陶瓦．（Terra cotta，意大利词，意为“烤干的土”，它用褐红色粘土制模，再在窑中高温烧硬．）板间有用白色大理石段建成的拱券，就铺在角支墩的外部．穹顶顶部留有一个直径约为5.6米的八边形开口，由连接内外壳的水平砌筑环箍紧．该环随后将要用来支撑采光亭．采光亭用白色大理石建造，有一个圆锥形的屋顶，它罩在穹顶的外部，用于内部采光，见彩图19和图4-33．1471年，人们在采光亭顶部放置了一个球和一个十字架，圣母百花大教堂终于完工了．



图**4-33**　穹顶内部一览，**Chanclos**摄



彩图 **19**　圣母百花大教堂及其穹顶和它在 19 世纪的大理石外部．Benjamin Sattin 摄

这座教堂长152.4米，宽38.1米，连穹顶有89.6米高，如果再加上采光亭，则高376英尺，一度是世界上最大的教堂．而今，罗马的圣彼得大教堂（见5.5节）和伦敦的圣保罗大教堂（见6.1节）的穹顶结构风格与它类似，但规模稍大．专家估计圣母百花大教堂的穹顶重约3万吨（内壳约为1.8万吨，外壳连同瓦和大理石段约8618吨，支墩约2722吨，还剩下约907吨为采光亭的重量）．事实上，它是1361吨重的圣索菲亚大教堂的穹顶（见3.1节）的20多倍，证明了这一穹顶具有重要意义，其规模在当时是空前的．圣母百花大教堂是人类所从事的最大胆、最让人印象深刻的工程壮举．

这座教堂外部和内部的许多装饰细节都是后来添加的，见彩图19和图4-33．图4-33中的湿壁画《最后的审判》（*The Last Judgment*）在穹顶约3994.83平方米的内表面上展开，它是在16世纪完成的．该画部分受到米开朗基罗在罗马的梵蒂冈西斯廷教堂天花板上绘制的《最后的审判》的启发．中殿的地板用大理石瓷砖铺成复杂的几何图案，在17世纪完成，精美装饰的大理石外立面则完成于19世纪．

在施工过程中，穹顶就开始出现裂缝．几年过去后，裂缝变得更宽了．4个主要的裂缝尤其需要关注．一份1985年出炉的详细的技术报告认为它们是由穹顶的巨大重量所产生的水平环向应力造成的．砌筑壳不够坚固，不能抵消这一应力，布鲁内莱斯基的石头和木链系统不能充分对它们进行限制．穹顶底部的支撑并不平衡，使问题更加严重．图4-34展示了交替支撑鼓座的大尖拱券和大型墩柱的顶部．不足为奇，4个墩柱对鼓座的支撑比4个拱券更有力，结果则使得拱券上方的4部分穹顶向下拉墩柱上方的4部分穹顶．图4-35是出现问题部分的简化受力分析图．该图展示了其中的两个墩柱、墩柱间的拱券和它们上方的那部分穹顶．墩柱向上的推力由两行向上流动的向量表示．箭头朝下的向量组代表拱券上方穹顶的向下的拉力．图4-35表明向上的向量受到向下拉力的影响而朝外偏转．这些偏转力在砌筑体上引起的张力与环向应力一起使墩柱所支撑的4个穹顶部分都产生了大的裂缝，在图中用虚的曲线表示．裂缝沿子午线至少延伸到穹顶往上$\frac{2}{3}$处，并远达鼓座的大窗户下．它们对内外壳产生影响，其宽度从1英寸到3英寸不等．根据近些年检查过这些裂缝的结构工程师的报告，穹顶没有毁坏的危险，除非发生地震．不过，目前正在用高科技设备对上述裂缝、其他的裂缝以及其他的结构问题进行广泛监测，并用复杂数学来分析处理．这种详细检查的目标是确定准确的测量方法，保证这座杰出的建筑在接下来几个世纪里仍然稳定．

圣母百花大教堂是具有哥特传统的教堂．图4-33表明支撑鼓座的大型拱券是哥特式尖拱．图4-34告诉我们隔出中殿的拱券也是尖拱，中殿上方的拱顶是肋拱顶．穹顶垂直截面的五分之一尖拱也是哥特拱．但是，拱顶得益于布鲁内莱斯基对罗马建筑的拱顶的研究（例如，他们砌出带斜角的砖层）．这些方面以及促使布鲁内莱斯基完成这座非凡穹顶的自信将圣母百花大教堂与文艺复兴联系起来．



图**4-34　Gryffinder**摄

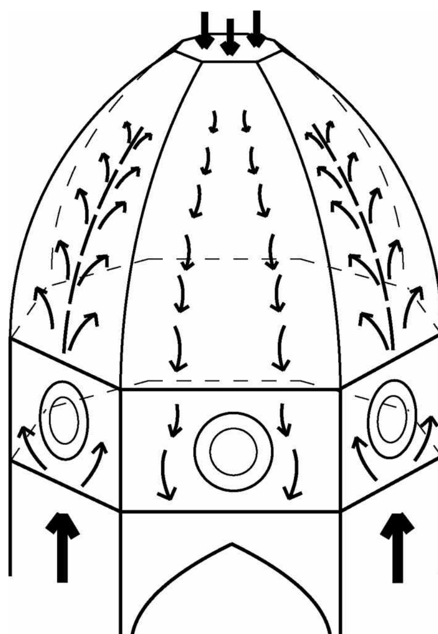


图 **4-35**

4.6 问题和讨论

开始的问题讨论圆锥曲线，接着是伊斯兰源头的问题．之后的问题则包括二维和三维坐标系，最后几个问题则关注佛罗伦萨大教堂的穹顶．这一节的最后是与本文论题相关的3个讨论．

问题**1**　为了感受一下希腊人的圆锥曲线，可以取一个手电筒，将它朝平坦的墙壁照射．该墙即为一个切割手电筒所发射的圆锥形光线的物理平面．如果使手电筒中装电池的筒垂直于墙壁，就会照亮一个圆形区域．如果手电筒质量好，则这些圆是整齐、清楚的．让手电筒倾斜，不再处于垂直位置，就会出现一个椭圆．让它继续倾斜直到手电筒和墙平行，就会得到一条抛物线．（当手电筒开始偏离墙壁时，会出现哪种曲线？）

问题**2**　考虑图4-36(a)中的抛物线．它的焦点在x轴的负半轴上，到原点O的距离为d．为什么点$(-d,2\,d)$在该抛物线上？令(x,y)为抛物线上的一点，用命题P2证明 $y^2 = -4\,dx$．现转向图4-36(b)中的椭圆．数字a和b分别是它的半长轴和半短轴．用(x,y)代表椭圆上的一点，用命题E2证明

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

．

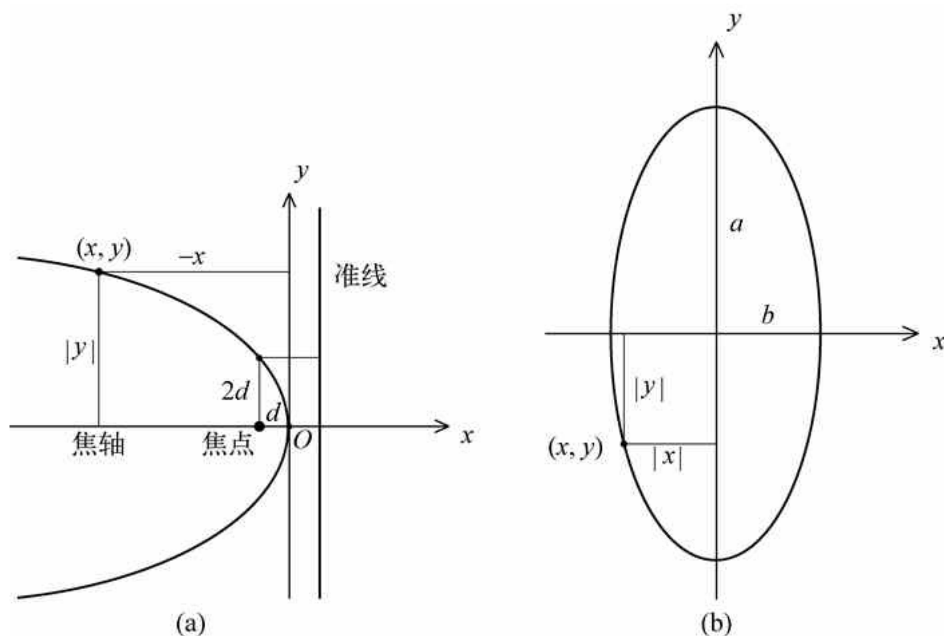


图　**4-36**

问题**3**　从抛物线的焦点F到它的准线之间的距离是3个单位长度．在距离准线7个单位长度处，平行于这条准线对该抛物线进行切割，如图4-37．用阿基米德的结论，确定该抛物线截面的面积．【提示：先分析△SFS'，找出割线的长度．】

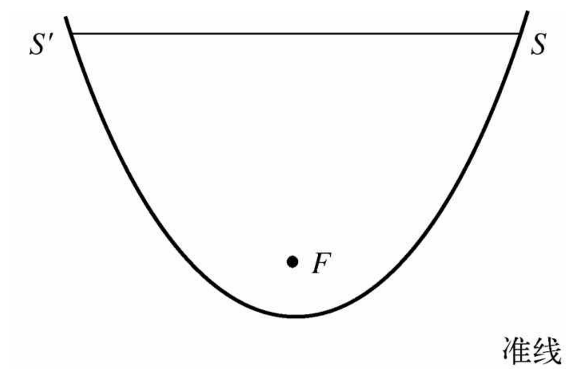


图　**4-37**

我们已经遇到过深具影响力的伊斯兰数学家花刺子密（约780—850）．问题4至问题7出自他的著作*Hisab al-jabr*….

问题**4**　求解方程 $(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54$．

问题**5**　求解 $\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=\frac{13}{6}$．

问题**6**　I 乘以某数的$\frac{1}{3}$加上单位长度除以该数的$\frac{1}{4}$加上一个单位长度，得到20个单位长度．确定该数．

问题**7**　I乘以某数的$\frac{1}{3}$除以该数的$\frac{1}{4}$等于该数本身加上24个单位长度．确定该数．

阿布·卡米尔（约850—930）是另一名伟大的伊斯兰数学家，他很有可能是埃及人．他的《代数之书》（*Book of Algebra*）扩展了花刺子密的作品．问题8至问题11选自该书．

问题**8**　找到这样的一个数，使得它加上7后，再乘以这个数的3倍的根后，得到的结果是该数的10倍.

问题**9**　找到这样的两个数x和y，满足 $x+y=10$ 且 $\frac{50}{x}\times\frac{40}{y}=125$.

问题**10**　找到这样的两个数x和y，满足 $x+y=10$ 且 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=4\frac{1}{4}$.

问题**11**　设a和b是正数且 $a\geq b$. 证明 $a+b-2\sqrt{ab}>0$. 再验证阿布·卡米尔的公式 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}$. 用它来证明 $\sqrt{18}-\sqrt{8}=\sqrt{2}$.

波斯数学家和天文学家阿尔卡西（1380—1429）在伊斯兰的撒马尔罕（今乌兹别克斯坦境内）工作. 阿尔卡西的文章《算术关键》（*The Key to Arithmetic*）描述了十进制小数，并用它来计算2π到小数点后16位（很明显，π ≈ 3.141 592 653 589 873 2）. 它还提出了一种计算*n*次根的算法. 此外，阿尔卡西还清楚地叙述了余弦定理（见第2章的问题15）. 事实上，在法国数学界，余弦定理被称为阿尔卡西定理. 问题12和问题13即基于他的作品.

问题**12**　阿尔卡西给出了对尖伊斯兰拱的设计，如图4-38所示. 首先从半圆开 始构造，研究该图，解释之后应怎样做. 【如需提示，请研究2.6节的罗马椭圆. 】

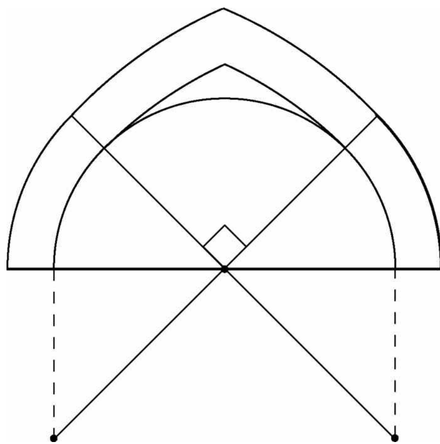


图　**4-38**

问题**13**　从阿尔卡西的半圆开始，对他余下的设计进行调整，从而构造一个在 威尼斯的圣马可大教堂中出现过的伊斯兰洋葱形拱（见彩图16）.

伊斯兰计算实践被基督教欧洲接受颇费了一段时间．僧侣格伯特（他后来成为教皇西尔维斯特二世）和比萨的莱昂纳多在这一问题上影响深广．莱昂纳多的《算盘之书》很多内容都是从阿布·卡米尔的《代数之书》得出的.

问题**14**　证明格伯特提出的边长为a的等边三角形的面积公式$\frac{a}{2}\left(a-\frac{a}{7}\right)$与估计$\sqrt{3}\approx\frac{12}{7}$等价．这一估计的好处是什么？

问题**15**　这是一个改编自莱昂纳多《算盘之书》的问题．两个人A和B每人都有 一定数目的硬币．若A给B9个，则A和B的硬币数相等，若B给A9个，则A的硬币数是B的10倍．则A和B最初各有多少个硬币？

问题**16**　在彩图18的托勒密地图上找到不列颠群岛、沙特阿拉伯、印度和东亚 并评论它们的形状.

问题**17**　计算数轴上点8和-5之间的距离，确定两点间的中点.

接下来的一些问题研究平面内的解析几何．前两个问题的解答需要2.4节叙述过的一些向量的基础性质.

问题**18**　考虑xy坐标系和从原点出发到达点(1,4)和(-4,-3)的两个向量，如图4-39(a)所示．计算这些向量的大小．该图画出了这些向量的水平和垂直分解向量．它还展示了根据平行四边形定理所获得的合向量．解释为什么这个合向量是图4-39b所示的从原点到点(-3,1)的向量.

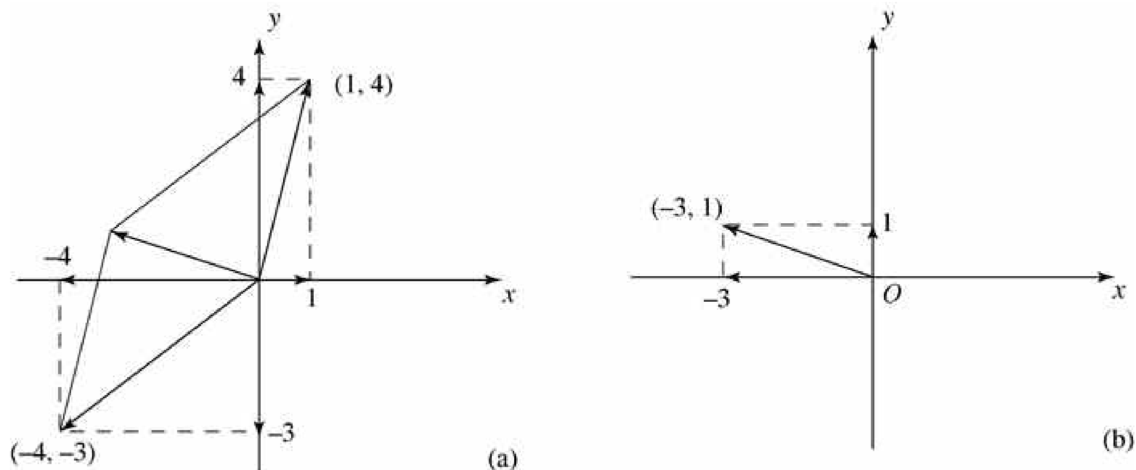


图　**4-39**

问题**19**　图4-40中的向量都从坐标系原点出发，到达图示中的各点．证明如果 它们代表作用在原点处的力，则这些力彼此平衡，不会使*O*点产生移动．

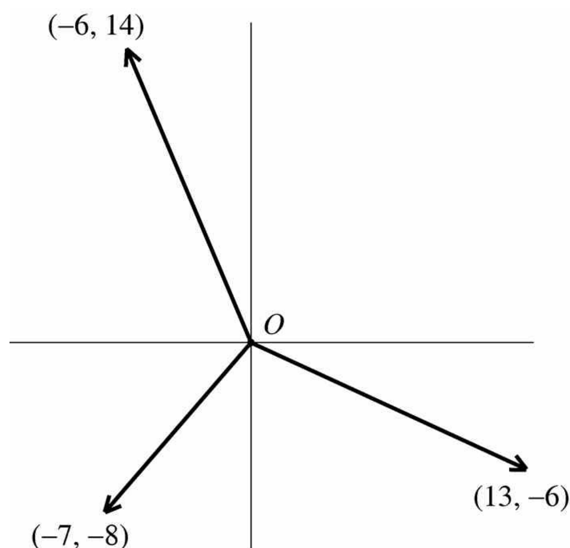


图　**4-40**

问题**20**　转到图4-17．若∠*BAC*为45°，确定屋顶*AB*的斜率．当该角为30°和25°时，重复上面的计算．

问题**21**　解释图4-41中正在从事的工作．两个三角形区域的底边都为13个单位长度，高度都为5个单位长度，不过它们的面积却并不相同．（正如图中对面积细分后所显示的那样．）

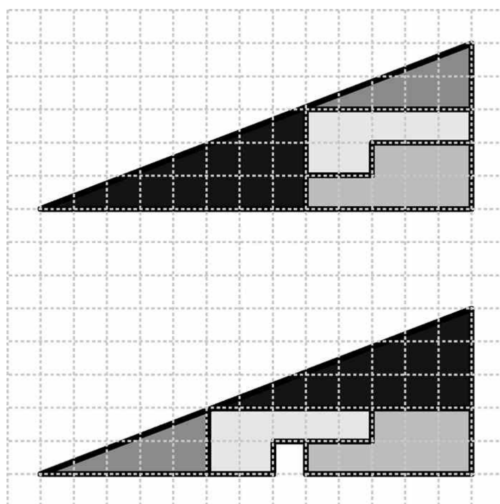


图　**4-41**

问题**22**　考虑*xy*平面内由两个点(5,1)和(-4,7)所确定直线．画出这条直线．找出这条直线的两点式、点斜式和斜截式方程．

问题**23**　画出方程$y=\frac{1}{3}x-4$对应的直线．

问题**24**　用距离公式验证点 $P_1 = (x_1,y_1)$ 和 $P_2 = (x_2,y_2)$ 所确定的线段中点为点$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$．

问题**25**　在坐标平面内标出两点 $A = (-3,-7)$和 $B = (6,8)$．求线段*AB*的距离和中点．

问题**26**　考虑*xy*平面内的圆 $x^2 + y^2 = 9$．将圆向下平移7个单位长度，再向右移动3个单位长度．新位置处圆的公式是什么？

问题**27**　考虑圆 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 20$ 和直线 $y = x - 3$．将它们画在*xy*平面上．再找到该圆与直线的交点．

问题**28**　找到圆心为(2,3)、半径为5的圆与过圆心斜率为$\frac{1}{2}$的直线的交点．求出该点的精确坐标，然后对其进行估计．

问题**29**　给定焦点为点(-4,5)、准线为直线*y*=-3的一条抛物线．设 *P* =

(x,y) 为平面内的一点，如图4-42(a)所示，根据抛物线的定义和距离公式，确定以x和y为变量的抛物线方程.

问题**30**　给定焦点为点(-3,-4)、准线为直线x=5的一条抛物线．利用抛物线的定义和距离公式，如图4-42(b)所示，确定该抛物线的方程.

接下来的问题考虑三维解析几何.

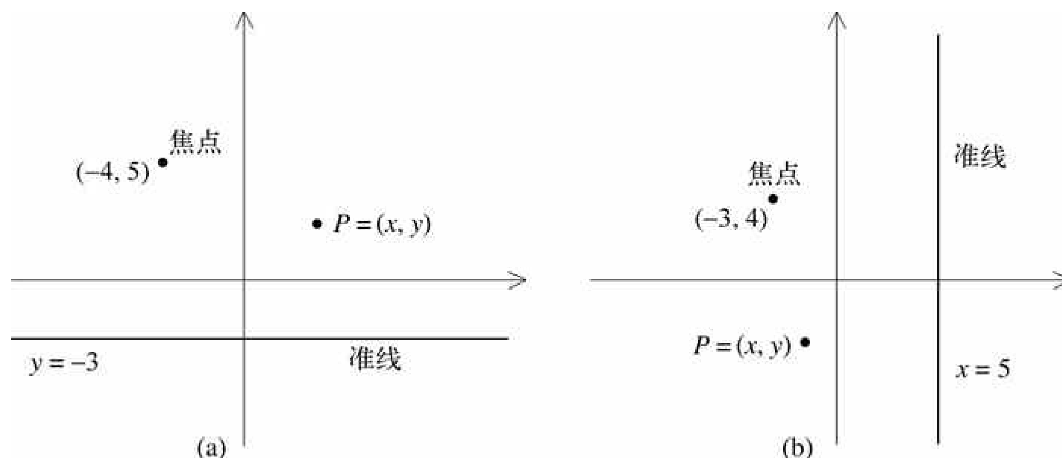


图　**4-42**

问题**31**　考虑平面 $3x - 4y - 2z = 1$ 和 $x - 2y + 3z = 4$．对每一个平面，画出它们与x、y和z轴的交点所确定的三角形，从而得出它们的位置.

4.4节结尾处关于圣索菲亚大教堂穹顶几何学的讨论需要添加一条说明．方程 $x^2 + y^2 = 50^2 - z_0^2$ 与变量z无关，因此只要(x,y)在xy平面内的圆 $x^2 + y^2 = 50^2 - z_0^2$ 上，z为任意值，则任何点(x,y,z)都满足该方程．可知xyz空间内 $x^2 + y^2 = 50^2 - z_0^2$ 的图形是过xy平面内的圆 $x^2 + y^2 = 50^2 - z_0^2$ 且平行于z轴的圆柱．因此这个圆上（该圆为讨论的焦点）过z_0的点(x,y,z)可由两个方程 $x^2 + y^2 = 50^2 - z_0^2$ 和 $z = z_0$ 确定.

问题**32**　半径为8的球 $x^2 + y^2 + z^2 = 8^2$ 与平面y=-5相交得到一个圆．这个圆的半径是多少？列出具有以下属性的两个方程，即如果一个点的坐标恰好满足这两个方程，则该点就在这个圆上.

问题**33**　确定方程 $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ 的图形.

我们接下来研究佛罗伦萨的圣母百花大教堂，尤其是它的穹顶.

问题**34**　观察图4-34．评论中殿上空成对的金属条以及侧廊上空连接拱券的那些金属条的结构相关性．你认为这些金属条是受到挤压还是拉伸？

问题**35**　参见图4-28．确定线段S_7S_8的中点．证明该点与S_5的距离等于点M和S_1的距离.

问题**36**　图4-43展示了在xy坐标平面上、经过相对的两根拱肋的穹顶外表面的抽象垂直截面．它是一个哥特式五分之一尖拱，跨距为10个单位长度．该拱券的两个圆弧所在的两个圆的方程是什么？y坐标为h的线段代表穹顶的采光亭的基部，长为$3\frac{1}{3}$．证明$\frac{h}{10}\approx 0.65$．这与下列尺寸：鼓座外直径约为174英尺、从穹顶基部到采光亭基部的垂直距离约为116英尺一致吗？

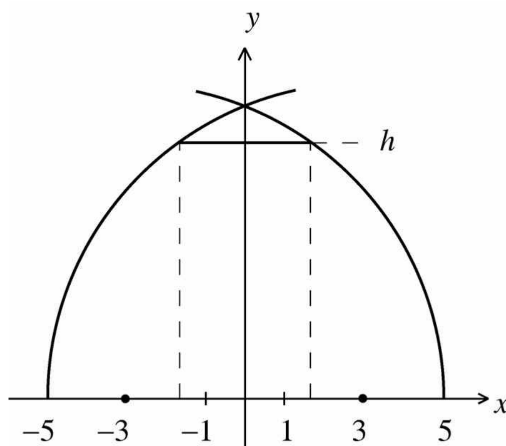


图　**4-43**

问题**37**　参考图4-29b中穹顶内表面的抽象图，以英尺为长度单位．给定穹顶的内直径S_1S_5为145英尺，证明S_1C_1 = 116 英尺，C_1S_5 = 29英尺，$OC_1 = OS_5 - C_1S_5$ = 43.5英尺．证明xz平面上圆心C_1为且过S_1和T的圆具有方程 $(x + 43.5)^2 + z^2 = 116^2$.

i. 在 $z = z_0$ 高度用水平平面切割该穹顶的内表面，证明在这一高度的穹

顶的八角形横截面的直径等于 $2\sqrt{116^2 - z_0^2} - 87$.

ii. 证明在 z_0 = 103 英尺时，该直径约为20英尺，在 z_0 = 105 英尺时，直径约为12英尺．这一结论与现有的论断并不一致，现在认为穹顶采光亭下面的八边形开口从鼓座顶部105英尺处开始，直径约为18.5英尺（参见图4-32）．解释出现这一差异的可能原因．

问题**38**　参见图4-29(b)．设*c*和*d*分别是C_1从到*O*点和S_1到*O*点的距离．考虑圆弧S_1T和圆弧所在的圆．这个圆是球和平面的交线．找出球和平面的方程．圆上的一点(x,y,z)需要同时满足这两个方程．对圆弧S_2T做同样处理．

讨论**4.1**　其他希腊几何学　欧几里得的《几何原本》讨论了5种值得特别注意的立体，并用柏拉图给它们命名．这些柏拉图立体是四面体、立方体、八面体、十二面体和二十面体．四面体有4个面（tetrahedron，tetra为希腊语，意为“四”），每个面都是等边三角形；立方体有6个面，每个面都是正方形；八面体有8个面（octahedron，octo为希腊语，意为“八”），每个面都是等边三角形；十二面体有12个面（dodecahedron，dodeca为希腊语，意为“十二”），每个面都是正五边形；最后，二十面体有20个面（icosahedron，icosi是希腊语，意为“二十”），每个面都是等边三角形．这五个立体是仅有的所有面都是同样的正多边形的三维凸面体（凸面体要求其所有的顶点都能放到同一个圆上）．《几何原本》对此做过验证，验证过程并不容易．不过展示一下这五个柏拉图立体如何制作并不困难．考虑如图4-44中那样排列的等边三角形、正方形和五边形．如果你剪下它们中的每一个，你就能完成接下来的操作．(a) 制作四面体，取出并在一起的4个等边三角形，沿点线折叠外面的3个三角形，使得3个点（均记作*A*）重合．(b) 同样处理排在一起的6个正方形，得到立方体．先沿点线折叠，使得标有*A*、*B*、*C*和*D*的每对点重合．(c) 取排在一起的8个三角形，将点线折成一个正方形，使得*A*点重合，接着沿点线折三角形，使得所有的*B*点重合，所有的*C*点也重合，就可以制作八面体．(d) 通过沿点线折叠，使得每对点*A*、*B*、*C*、*D*和*E*重合，这样就把左边的6个五边形聚在一起，形成一个五边形的“杯子”，对右边的6个五边形做同样处理，形成第二个五边形杯子．接着把这两个杯子连接起来，使得*A*和*A*′、*B*和*B*′等重合．(e) 按照4-44(e)中的提示，制成二十面体．折叠并将点连接后，点*C*和*D*就位于一个五边形的“帽子”顶上．由于该图形具有对称性，从该二十面体的

12个顶点中的每一个出发都会得到这样的一组五边形．十二面体和二十面体如图4-45(d)和图4-45(e)所示．

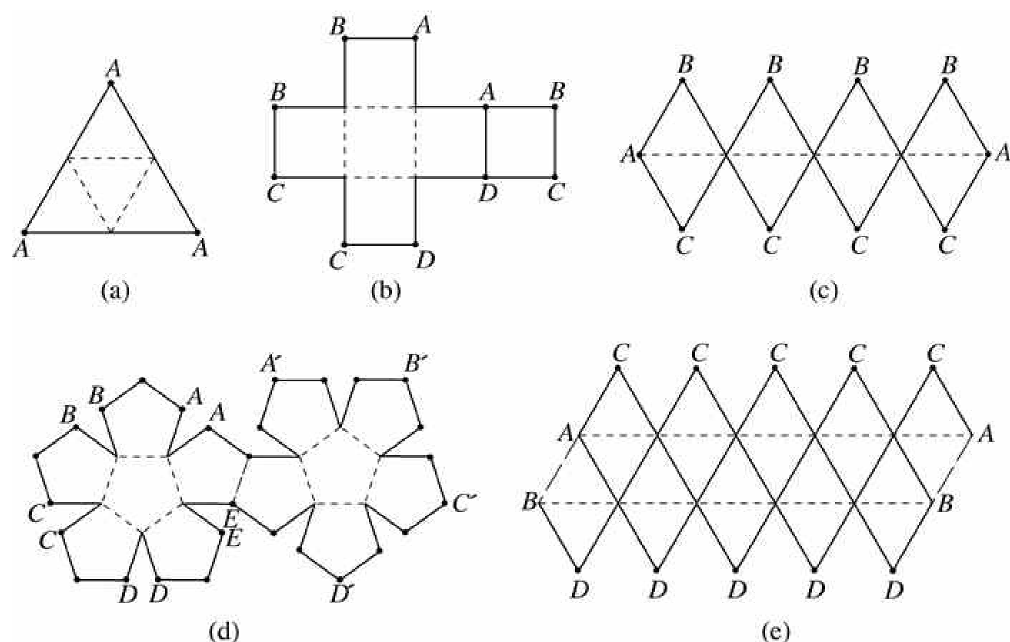


图　**4-44**

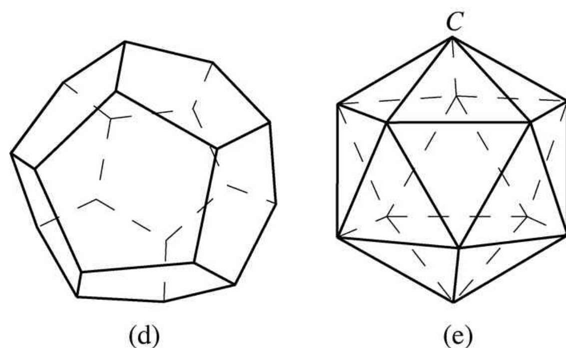


图　**4-45**

柏拉图认为这些立体与宇宙的结构有关．他使这些立体与4种经典的基本元素相关联：立方体对应泥土，八面体对应空气，二十面体对应水，四面体对应火，十二面体是“上帝用来在整个天空布满群星”的物体．柏拉图立体与建筑之间的联系比它与柏拉图科学之间的更强．当用彼此相连的金属条构造二十面体时，它就成为非常稳定的结构．可以在球面上等间距取一些任意数目的点，将它们用杆连接起来，形成对称的三角形网（有时也包括正方形和其他多边形），从而设计出更精细的结构．用

屋顶覆盖这类结构时，就称为测地线球体或测地线穹顶（当只考虑球体的一部分时）．这种全部由三角形构成的表面结实、稳定并且重量轻．它们在20世纪后半叶得到建造，用作温室、礼堂、气象台和存储设施．不过测地线球体也有缺点，这些缺点包括大量边和平面的绝缘和防水问题，曲面墙围成的空间不如矩形墙围成的实用．

问题**39**　研究图4-45(e)．你看出将一个二十面体变成所有边都是同样的等边三 角形但却不是凸面体的方法了吗？

问题**40**　莱昂纳多·达芬奇在他的笔记中研究了十二面体．图4-46中的图形就是一个例子．达芬奇可能想要对这些图形做什么？

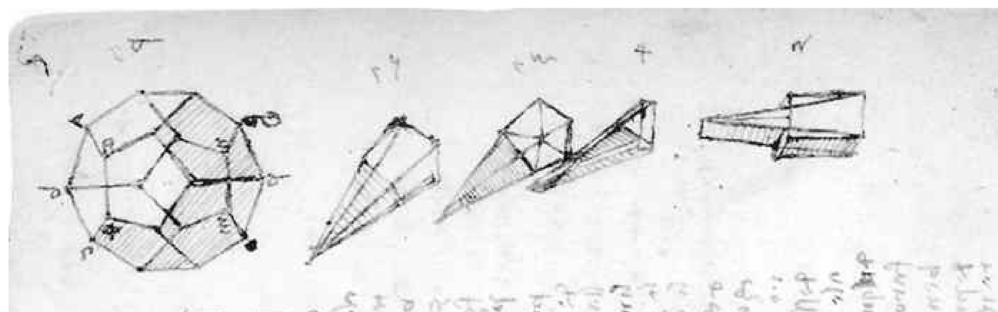


图**4-46**　选自福斯特法典（***Forster Codex***）第**1**卷第**7**页的素描．版权归**V & A Images/Victoria**及伦敦阿尔伯特博物馆所有

地图在世界领土的发现、发展以及控制方面一度起到重要的历史作用．之前我们在托勒密的地图中已看到了这种作用．制图师所面临的困难中，有一种就是几何学难题．事实是球体的任何部分都不能在不变形的情况下变成扁平．（例如，不撕开，就不能使橙子瓣的外皮贴在桌面上．）这就意味着不管使用哪种方法绘制世界区域的地图，变形是不可避免的．看一下北美的标准地图，找出变形来．二十面体曾被用来绘制地图．将地球的模型视为理想球体，以某种方式将一个二十面体放入该球内，使得二十面体的顶点都在该球上．取球上的任意一点，将它沿着球心的方向投影到该二十面体上．用这种方法，球上的任意一点都与二十面体上的一点相对应，该二十面体是地球的代表．沿一些边切开这个二十面体（尽量让切割都落在海洋区域），再展开，就得到了平面世界地图．

讨论**4.2**　有理数和无理数　如果一个大于1的整数只能被1和它本身整除，则它是一个素数．比如2、3、5、7、11、13和17．事实上，任何大

于1的整数都能写成素数的幂的乘积的形式，且只能写成一种形式（除了调换因子的顺序）．例如，$324 = 2^2×3^4$和 $4536 = 2^3×3^4×7$，不能写成其他的形式（比如除了写成 $324 = 3^4×2^2$ 和 $4536 = 7×2^3×3^4$）．注意如果一个数是平方数，则乘积中的所有素数都是偶数次幂．例如，$4536^2 = (2^3)^2×(3^4)^2×(7)^2 = 2^6×3^8×7^2$．同样，如果乘积中的所有素数都是偶数次幂，则这个数为平方数．例如 $324 = 2^2×3^4 = (2×3^2)^2 = 18^2$．

根据上述内容，如果m是一个正整数，则只有m是平方数的时候，$\sqrt{m}$才是有理数．为什么会这样呢？的确，对一个正整数n，如果 $m = n^2$，则 $\sqrt{m}=n$为有理数．但其他情况呢？如果对正整数s和t，有$\sqrt{m}=\frac{s}{t}$，此时m为平方数吗？如果$\sqrt{m}=\frac{s}{t}$，则 $m×t^2 = s^2$．如果m的因式分解中有一个素数为奇次幂，则 $m×t^2$ 的因式分解中也有一个素数为奇次幂．由于 $m×t^2 = s^2$ 为平方数，这不可能成立．因此若m的因式分解中所有素数都是偶数次幂，则m为平方数．可知除了$\sqrt{4}=2$、$\sqrt{9}=3$、$\sqrt{16}=4$等，$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$、$\sqrt{8}\cdots$都是无理数．顺便提一下，以上所有的内容都为希腊人所知，能在欧几里得《几何原本》中找到．

问题**41**　考虑数$\sqrt{n}$，$n = 1,2,…,100$．这些数中有多少个有理数，多少个无理数？考虑数$\sqrt{n}$，$n = 1,2,…,1\,000\,000$．这里面有多少个有理数？【提示：其中有多少个平方数小于等于1 000 000？】

问题**42**　在建筑平面图和正面图中作为长度的数一般是无理数．例如，长为1、宽为n的矩形的对角线长度为$\sqrt{1+n^2}$．证明任何能写成$\sqrt{1+n^2}$且n为整数形式的数都是无理数．

设r为任意实数．它的小数部分是否存在一种模式，可以用来判断r为有理数还是无理数？假设r的小数部分从某位开始有一个重复的数字段，举个例子，设 $r = 23.748\,658\,658\,65…$，数字段865重复出现．则 $100\,r = 2\,374.865\,865…$，$100\,000\,r = 2\,374\,865.865\,865…$，注意 $1\,000\,000\,r - 100\,r = 2\,374\,865-2\,374=2\,372\,491$．因此 $99\,900\,r = 2\,372\,491$．则有 $r=\frac{2\,372\,491}{99\,900}$是一个无理数．那么反向推理，任意有理数的小数部分会有

一个重复出现的数字段吗？使用手算除法，如s除以t，我们知道，每一步所得的余数都小于t．这个余数出现的概率只能是有限数．如果0为余数，则除法过程终止，0为重复的数字段．例如$\frac{581}{25}=23.24=23.240\,00\cdots$．如果0不是余数，则除法过程会继续，这样必定会有一位会重新出现余数．从这一位开始，循环就出现了．例如，1124除以132，如图4-47所示，它告诉我们第一个余数是68，第二个是20，然后68又出现了，因此两步之后，出现了重复．其他的例子中，在同一个余数重复出现之前，除法过程可能需要进行很多步．但总会存在一个重复出现的循环，因此小数部分会有重复的数字段．可以推得有理数正是那些小数部分有重复数字段的实数．

```
       8.5151 ...
132 │1124
     1056
       680
       660
        200
        132
         680
          20
```

图　**4-47**

一些无理数的小数部分完全是不可预测的．例如π．π = 3.141 592 653 589 873 2 … 的展开没有模式．在展开中出现的数完全是随机的．最后一点，从展开中截断得到的数，如3.14、3.141 59、3.141 592 653等都是有理数（因为$3.14=\frac{3141}{1000}$、$3.141\,59=\frac{314\,159}{100\,000}$、$3.141\,592\,653=\frac{3\,141\,592\,653}{1\,000\,000\,000}$等）．这说明，事实上可以用有理数以任意想要的精度估计任何实数．

讨论**4.3**　比较结构及其模型的稳定性　考虑用来研究建筑结构的模型，如布鲁内莱斯基为佛罗伦萨大教堂穹顶制作的模型．假设制作模型所用的材料与设计结构相同．这样二者之间唯一的区别在于尺寸．关键的问题是：模型稳定就能确保结构本身稳定吗？让我们考虑简单一点的问题．假设设计结构包含一个由两根平行木梁所支撑的石圆柱，木梁的两端则放在一个刚性基座上．圆柱直径为1英尺，重量约为400磅．支撑

圆柱的两根木梁长为$2\frac{1}{2}$英尺，横截面为边长为1英寸的正方形，如图4-48(a)所示．我们假设模型的所有尺寸都是该结构的$\frac{1}{12}$，如图4-48(b)所示．因为1英尺等于12英寸，则1立方英尺等于 $12\times12\times12 = 1728$ 立方英寸．可推出模型中的圆柱直径为1英寸，重量约为$\frac{400}{1728}\approx 0.23$磅．模型的每根木梁长为$2\frac{1}{2}$英寸，横截面为边长为$\frac{1}{12}$英寸的正方形．这样的模型很容易用牙签和25分的硬币制作．20个25分硬币叠在一起的重量比0.25磅稍多一点，很容易用两根牙签支撑起来．不过即使你不是一个赌徒，你也很有可能打赌，不可能用上述的方法使两根$2\frac{1}{2}$英寸长、1英寸宽、1英寸高的普通木梁承受400磅的重量．

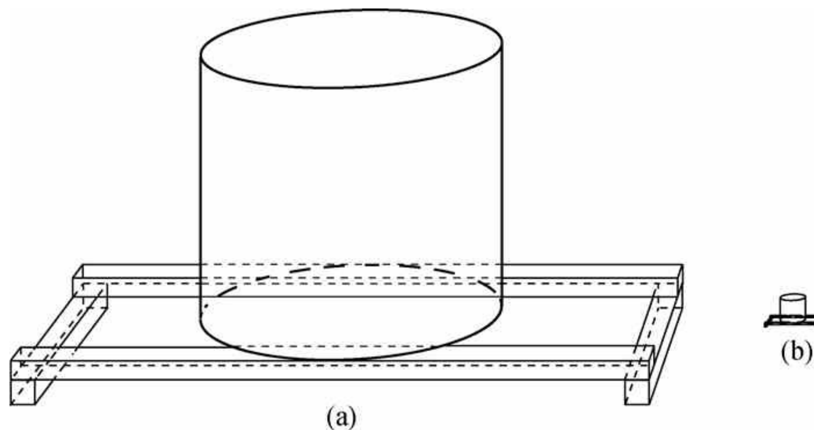


图　**4-48**

问题**43**　用25分硬币和牙签制作上述模型．设计并测试一些圆柱结构来解决打 赌问题．

事实上，模型的结构稳定并不表明它所代表的建筑物稳定．主要的原因是重量与体积成正比，而体积随线性尺寸的立方变化．因此，尺寸上的增加与它对结构所受到的负载的影响不成比例．我们有理由认为，布鲁内莱斯基清楚他的模型不能可靠地预测穹顶的稳定性．不过，历史将这一见解的提出归功于伽利略．他在1638年发表的《关于两种新科学的论文》（*Discourses about two New Sciences*）对其做了描述．

第5章　文艺复兴：建筑与人文精神

14世纪和15世纪期间，5种主要的政治势力控制了意大利半岛：3个重要的城邦，即佛罗伦萨、威尼斯和米兰；以罗马为中心的梵蒂冈州；那不勒斯王国．在战火频仍、联盟与边界时常变动的时期，像锡耶纳、热那亚和比萨这样的小城邦的命运起伏不定．尽管这样，制作业还是在城市和乡镇发展起来，它们的市场逐渐扩大，商业活动日益增加．不久商人和银行家阶级与权贵共享财富、土地和影响力．随着商业的发展，对法律和契约协议的需要也随之增长．商人需要知道如何读、写和计算．银行家需要提供簿记方法、扩大灵活的信贷以及评估抵押品．律师需要进行合作及贸易协定谈判．商业和官僚政治的活动变得更复杂，日益需要有才干的职员．商业、金融和法律活动的重要性和广度要求教育多关注实践，少注重理论，提供专业的技能、突出的能力以及世俗的态度．

人文主义研究课程，即studia humanitatis初步提供了这种教育．它包括对古代作品的阅读，对语法、法律、修辞、历史和伦理学的研究．商人和统治阶级的成员不仅希望得到教会教义的忠告，还希望得到罗马的实践知识和希腊的世俗哲学．在中世纪，上帝被认为是一切创作的源泉，人类活着是为了为他服务．意大利城邦的公民向古代的智者学习，对他们面临的挑战作出响应，他们发现了上帝赋予自身的创作能力以及推理、思考、行动、想象和建造的能力．这一认识就是文艺复兴（该词在法语中意为重生）的黎明：一个在文学、绘画、雕塑和建筑上取得辉煌成就的时代．两幅著名的绘画捕捉到这一新纪元的推动力量．

作为那个时代的肖像和壁画画家、大艺术家之一，拉斐尔（1483—1520）的湿壁画《雅典学派》（*School of Athens*）描绘了既富古典主义又具文艺复习特征的伟人们在同一场景内交谈的情景．在彩图20中，我们可以看到雪白胡须的柏拉图在中心拱门下和亚里士多德交谈．理想主义的柏拉图在左边，手指天空．他按照莱昂纳多·达芬奇（1452—1519）的样子绘制，达芬奇是位多才多艺的天才，绘制了《蒙娜丽莎》和《最后的晚餐》，用他的绘画艺术给出了对自然的分析以及他自己所设计的机器的运行方式．理性的亚里士多德在柏拉图的右边，手向下垂．在他们的下方，半躺在台阶上的是第欧根尼，他是希腊哲学家，将

极端贫困视为美德．前景处靠在大型白色大理石桌上的是希腊哲学家赫拉克利特，他以年轻、专注的米开朗基罗的样子来描绘．米开朗基罗（1475—1564）以其雕塑《大卫》、《摩西》和《哀悼基督》，以及在梵蒂冈西斯廷教堂的天花板上的湿壁画和由他施工的辉煌建筑成为文艺复兴时期最多才多艺的大艺术家．在米开朗基罗的左边，我们看到毕达哥拉斯正在阅读一本大书．在右下角，一个几何学家（很可能是欧几里得，也可能是阿基米德）被绘成伟大的文艺复兴时期的建筑师布拉曼特（1444—1514）的样子，他正弯腰演示几何作图．他旁边背过身站着的是克罗迪斯·托勒密，他手里拿着一个地球仪．拉斐尔还把头戴黑帽的自己放在这一群人里．他们所处的建筑物最有可能是布拉曼特所设计的，那时刚开始在罗马建造的新圣彼得巴西利卡．因为天主教教会的所属机构曾举行过基督教信仰和希腊哲学之间的智力辩论并批准它们在天主教神学内部综合，所以这里是思想家们会面的恰当场所．



彩图 **20**　拉斐尔的《雅典学派》（*School of Athens*），1508~1511，梵蒂冈

米开朗基罗的湿壁画《创造亚当》，如图5-1所示，描绘了强大的上帝以他的形象创造人类．它描绘了正被注入神圣火花的人类，是对高贵人

性的诗意表达．拉斐尔和米开朗基罗的绘画都是新时代的象征，证明文艺复兴时期对知识的好奇心和深刻的思想在视觉意象中找到了最灿烂的表现形式．

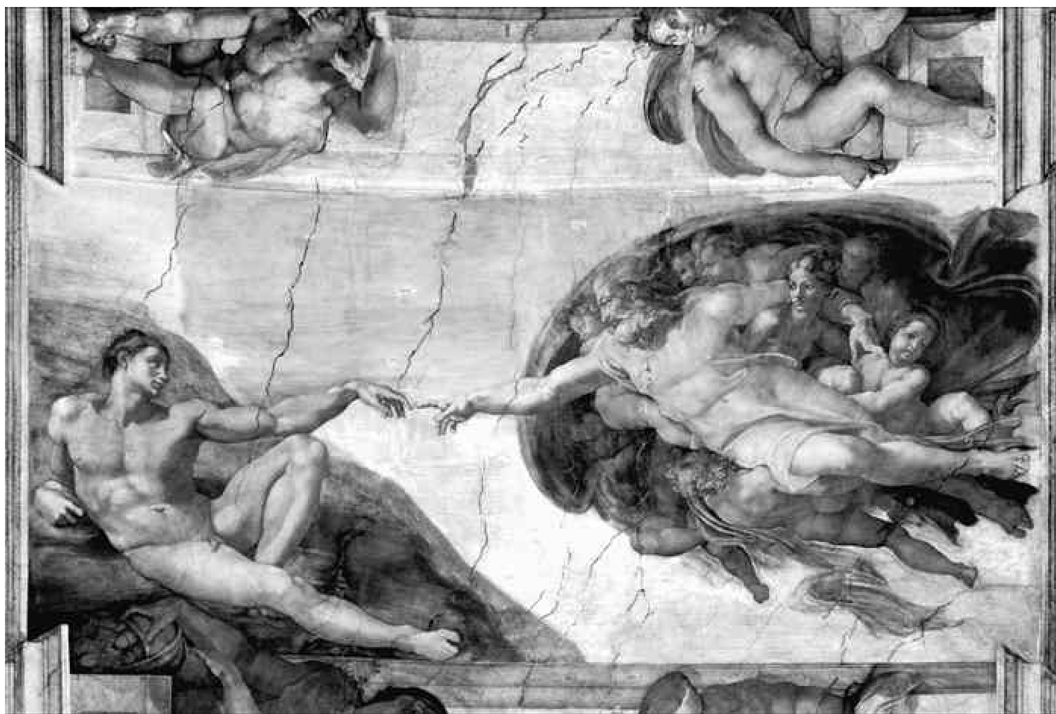


图**5-1**　米开朗基罗的《创造亚当》（***Creation of Adam***），西斯廷教堂的一幅场景，**1508-1512**，梵蒂冈

13世纪和14世纪，伟大的古典思想家的作品一度刺激了中世纪哲学家和神学家的学术活动．接下来的两个世纪，古典艺术家和建筑人员的作品激发了文艺复兴时期大师的创作艺术．中世纪学者的成就只被知识界和大学中的象牙塔所理解，但文艺复兴时期艺术家的辉煌则在公共领域迸发开来．富有、强大的意大利城邦，尤其是佛罗伦萨，提供委托并供给资源．他们慷慨地支持艺术和建筑，想要给它们的地位赋予合法性并彰显其古典主义知识．

5.1 上帝、人和比例

虽然文艺复兴建筑的理性的正面、有列柱的门廊和凉廊、带拱廊的矩形庭院和封闭穹顶起源于希腊和罗马，但它们却反映了新时代的高雅精神．通常认为佛罗伦萨的孤儿院是第一座文艺复兴建筑．它原本是为弃婴及孤儿建造的收容所，现在成为一座博物馆．它正面的带列柱的凉廊由布鲁内莱斯基在1419~1424年设计和建造，其细部如图5-2所示．科林斯柱证明该结构设计源自古典主义，它们上方的圆形浮雕暗示了它的功能．布鲁内莱斯基那时全心投入到圣母百花大教堂穹顶的建造中，没有完成这座收容所的建造．它后来由其他建筑师接手，他们遵循了布鲁内莱斯基所建立的风格基调．在建筑物内部，带拱廊的庭院也严格遵循正面的风格．这类带拱廊的庭院，有时有两层或三层拱廊，成为文艺复兴建筑的标志．图5-3展现了后期罗马式的一个代表．



图**5-2**　布鲁内莱斯基设计的孤儿院的正面细部，**1419~1424**，佛罗伦萨．**Giacamo Augusto**摄



图**5-3**　梵蒂冈大臣官邸庭院，**1489~1513**，罗马．建筑师未知，可能是弗郎西斯科·迪乔治，但不正确地归到多纳托·布拉曼特名下．**Emmanuel Brunner**摄

罗马建筑师马克库斯·维特鲁威·波利奥的权威著作《建筑十书》是联系文艺复兴建筑与希腊和罗马建筑根源的重要纽带．这本书写于公元前1世纪，是现存的唯一一本古代建筑作品．它的内容涵盖基础建筑设计（“不断正确使用圆规和直尺作出底层平面图”）、施工方法（例如讨论罗马混凝土的性质）以及城市规划．《建筑十书》是几名伟大的文艺复兴时期的建筑大师的圣经．当他们在宗教与公共建筑设计及其各构件之间的关系上需要建议时，就向维特鲁威求助．维特鲁威有一本书探讨了人体比例．图5-4中莱昂纳多·达芬奇用一幅素描说明了一个核心观点，即身体魁梧的男人伸开手脚形成两个最基本也是最完美的几何形状：圆和正方形．对文艺复兴时期的建筑师而言，这幅简单的图画揭示了上帝的创造、人类的形体以及建筑之间的一种深刻而基本的联系．人类是上帝的形象，他们的身体比例是神的意志的结果．因为建筑需要与这一宇宙秩序相一致，建筑物就应该反映人体的比例．这样就有了“人是衡量一切的标准”这一观点的具体形式，而它是文艺复兴时期的指导方针之一．

莱昂·巴蒂斯塔·阿尔伯蒂（1404—1472）是一名建筑师、哲学家、数学家、音乐家、骑手和严谨的运动员．他不仅是一个想象力丰富、积极进

取的建筑师，还凭借对建筑的哲学思考成为那个时代重要的建筑理论家．阿尔伯蒂将建筑学不仅仅视为研究建筑实践的学科，由于它塑造了物理环境，也成为用来塑造社会的基本框架．阿尔伯蒂进入梵蒂冈权力圈，成为文艺复兴时期最有影响力的思想家．

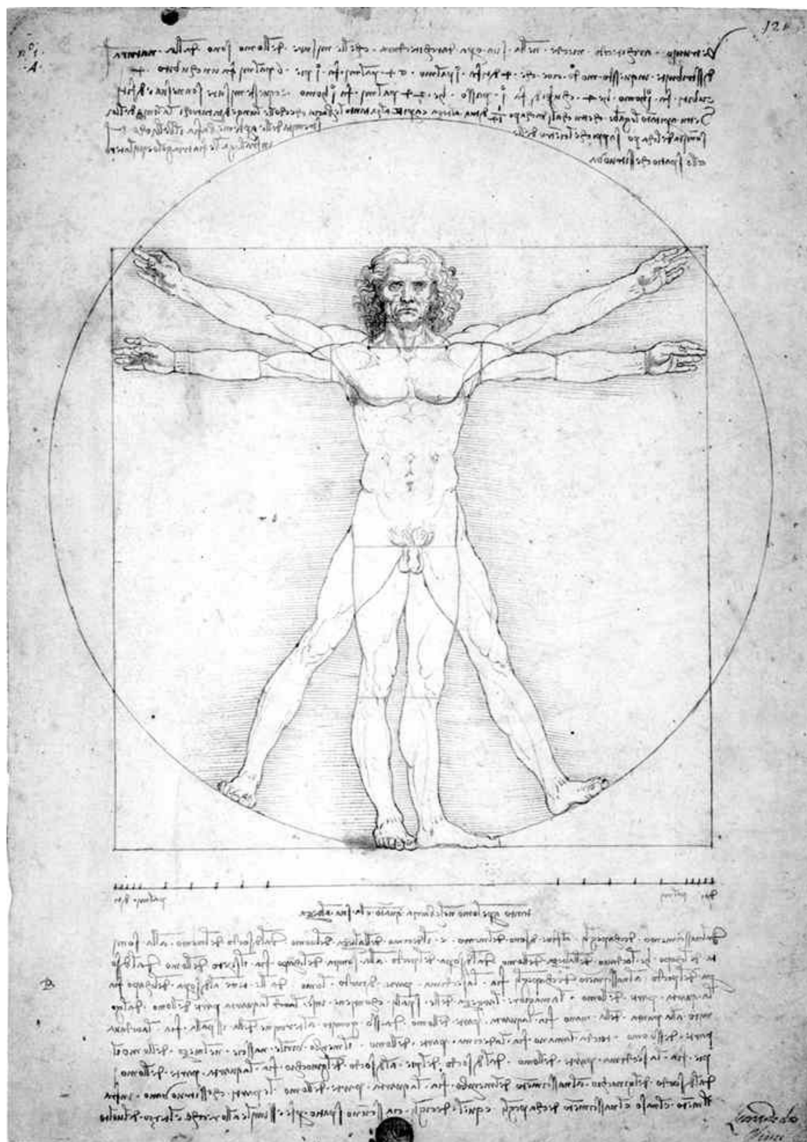


图**5-4**　莱昂纳多·达芬奇的《维特鲁威人》（***Homo Vitruvianus*** 或***Vitruvian Man***），**1492**．用钢笔、墨水、水彩和金属尖笔在纸上绘制

阿尔伯蒂被委托为佛罗伦萨的中世纪教堂建造一个新立面．新圣母玛利亚教堂（见图5-5）建于1279~1320年，具有哥特式传统风格（是意大利仅有的几座哥特式教堂）．新立面需要将6个现存的哥特式墓和旧教堂

的两个哥特式侧门包含在内．阿尔伯蒂的设计忠实于维特鲁威的精神，主要使用了圆和正方形．立面上部的突出特征是包括窗子在内的4个圆．立面底部则是由两个相同的正方形构成的矩形（在图中以黑色显示）．同样尺寸的正方形（也用黑色显示）还围出了立面上部中心部分的框架，并且整个立面能放入一个大小是其两倍的正方形内（用灰色显示）．新圣母玛利亚教堂的新立面在1456~1470年完工．受该设计的启发，许多文艺复兴时期的建筑师的建筑都在阿尔伯蒂作品主题的基础上进行变化．

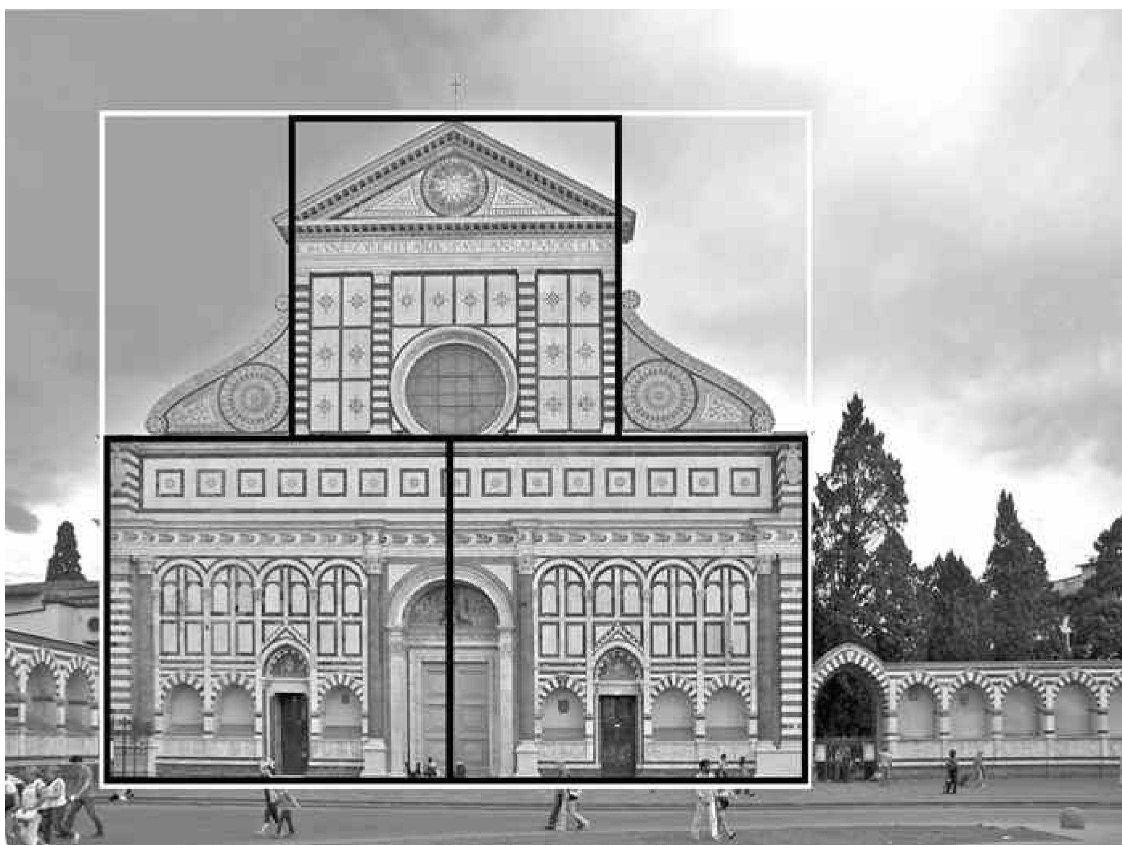


图**5-5**　阿尔伯蒂设计的新圣母玛利亚教堂的立面，**1456**～**1470**，佛罗伦萨．**Jebulon**摄

5.2 阿尔伯蒂、音乐及建筑

受维特鲁威的启发，阿尔伯蒂思考了建筑物的理论和实践问题，并将其观点集中到一部建筑学著作中．最初的手稿完成于1452年，阿尔伯蒂余生一直在进行这项工作．他的《论建筑艺术》（*De Re Aedificatoria* 或*On the Art Building*）直到去世后才出版．在该书最有影响力的部分，阿尔伯蒂正式整理并确定了古典建筑的主要特点，创建了比例理论用来指导建筑物及其构件的设计．阿尔伯蒂提倡这样的观点，即一座建筑应该是一个和谐的整体，它的每个部件，不管是内部还是外部都需要综合设计．为了达到这一目标，建筑师应受符合高度美学的比例系统的指导．它不可能是建筑师自身选择的系统，而是植根于更高秩序，即上帝的宇宙内部的和谐秩序中．上帝对宇宙的设计，包括对人类体态的设计与某种数学法则一致．这些法则需要为那些设计建筑物的建筑师所理解和应用．

阿尔伯蒂吸收了毕达哥拉斯学派的观点，即数字解释宇宙中一切，两个和谐乐音与简单的数字比率之间的关系是对此的重要表示形式．显然阿尔伯蒂认为建筑中的比例应该遵循同样简单的数字比率．参照毕达哥拉斯学派，他告诉我们“那些与以某种方式愉悦我们的耳朵的声音相一致的数字，也恰好同样愉悦我们的眼睛和头脑”．阿尔伯蒂继续写道：“因此为了获取关于和谐关系的一切准则，我们应从极其熟悉这类数字的音乐家以及能完美展现自然的特殊事物的身上获得借鉴．”这一观点成为文艺复兴时期比例概念的基础．文艺复兴时期的建筑师确信和音是确定宇宙和谐的听觉体现，含有对建筑的约束力．建筑师在设计中表达这一观念时，并非简单地将音乐比率转移到建筑中，而是实施应用自然所遵循且由音乐所揭示的宇宙法则．

因为音乐曾被认为是一种属于数学的科学，它有着非常特殊的吸引力．从古典时代延续下来的一种传统认为算术（研究数字）、几何学（研究空间关系）、天文学（研究天体运动）和音乐（研究耳朵觉察到的声音）形成4种重要的人文科学．与这些崇高的知识追求不同，绘画、雕塑和建筑被认为是一些手艺，地位要低得多．给建筑提供数学基础会把它从一种手工艺术提升为一门知识学科．

让我们转向分析乐音时出现的数字关系．当物体振动时，空气分子就开始运动．震动从各个方向传播到空中，成为密度较高或较低的空气分子

交替出现的一系列压力前锋．当这一系列前锋撞击耳朵时，我们就听到了声音．假设有一根弦（可看成是弦乐器的弦）受到拉伸且两端固定．图5-6展现了这根弦，它的端点为A和B，P为弦的中点．该弦有弹性，通过拉P点，能使其偏离原始位置APB．当松开这条弦时，它会以行波的形式来回振动．我们称上述过程为拨弦．振动的弦所产生的声音为一个音．每秒波来回运动（可以考虑点P进行上下运动又回到其原始位置的一个循环）的次数是该音的频率f．频率由弦的长度、制作材料的密度和它受到的拉力决定．我们可以听出音的频率和音高．音高的范围从很高（想像一下小提琴的高音）到很低（想像一下低音提琴）．频率决定音高：频率高，音高就高；频率低，音高就低．如果弦拨得厉害，音量会增加，但频率和音高仍不变．

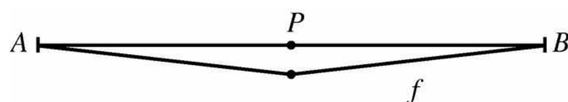


图　**5-6**

毕达哥拉斯学派发现了下文中弦长与其产生的音频之间的有趣联系．图5-7考虑了两根材料相同，受到同样拉力的弦．其长度为L_1和L_2，拨动时它们所产生的音的频率分别为f_1和f_2．毕达哥拉斯学派发现如果弦长L_1和L_2的比值分别为2∶1、3∶1、3∶2或4∶3，则它们所产生的音的频率f_1和f_2的比值正好相反，为1∶2、1∶3、2∶3和3∶4．即弦越长，音高越低；弦越短，音高越高．这种关系可用数字精确表示：如果L_1和L_2的比为r，则f_1和f_2的比为$\frac{1}{r}$．对于频率比为1∶2、1∶3、2∶3或3∶4的4种情况，两个音一起听很悦耳．它们是和音．事实证明和音是特例，而非法则．

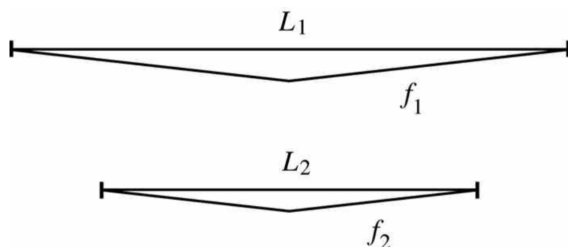


图　**5-7**

除了长为L的弦，再考虑长为$\frac{1}{2}L$、$\frac{1}{3}L$、$\frac{1}{4}L$、$\frac{1}{5}L$等的弦．所有的弦材质相同，受到同样的拉力．图5-8绘出了它们．如果f是长为L的弦产生的音频，则根据长度和频率的相反关系，其他各弦所产生的音频分别为2f、3 f、4 f和5 f等．这些音的音高都比频率为f 的音高，但都是它的和音．既然我们知道了这些，就能对前面的讨论进行提炼．

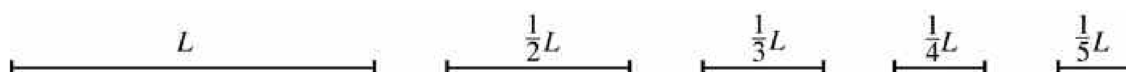


图　**5-8**

当拨弦时，会产生混合音．频率最低的音，设为f 起主要作用．它的频率或音高是基本频率或基本音高，称其为一次谐波．但还产生了其他频率的音．它们是2次、3次、4次和5次谐波等．发出的声音是所有谐波的混合，称这一混合为该声音的音色．用几何学表示，这意味着当松开图5-6中的弦后，它的形状随时间以一种非常复杂的方式变化．该弦的形状是它的所有单次谐波波形的合成．图5-9展示了前6次谐波的波形．对这6种频率，我们认为每一种的弦都从图中黑线描述的位置平稳、连续地向浅灰色描绘的位置移动，接着回来，又上去……（振动的弦发出的声音是谐波的混合，这一事实告诉我们图5-9中展示的单一频率音实际上不可能由振动的弦发出．只有电子乐器能发出单一频率或音高的音．知道这些后，可以用振荡器产生图5-9中的波形．而弦的几何图形是这种波形的混合，它发出的声音是其中一些单一谐波音的合成．）

在接下来的讨论中，我们总是认为振动的弦发出的音的频率或音高是基本频率或基本音高．同样，提到的所有弦材质都相同，且都受到同样的拉力．

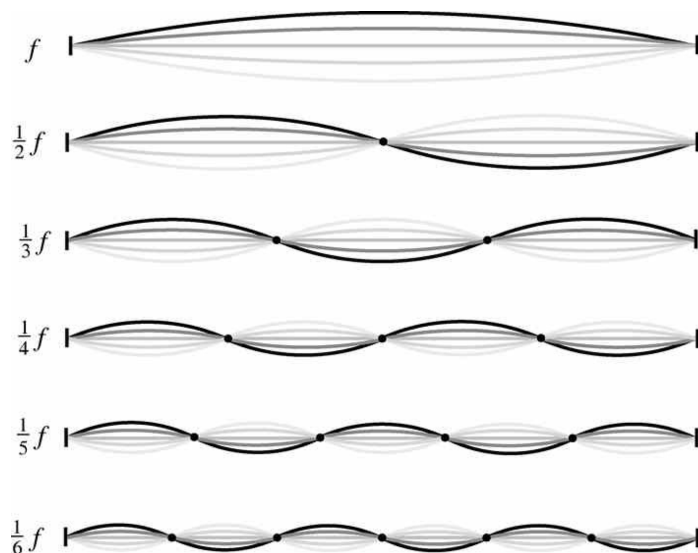


图　**5-9**

图5-10(a)展现了一根长为L的弦．我们称它发出的音为基准音，f为其频率．图5-10(b)、图5-10(c)和图5-10(d)考虑长为$\frac{3}{4}L$、$\frac{2}{3}L$和$\frac{1}{2}L$的弦．它们分别发出频率为$\frac{4}{3}f$、$\frac{3}{2}f$和2f的音．（第三个音是基准音的2次谐波．）若我们指定基准音的音高为1，则其他3种音的音高分别为$\frac{4}{3}$、$\frac{3}{2}$和2．毕达哥拉斯学派知道这些音中每一个都与基准音是和音．图5-11中的白色矩形按音高增加的顺序代表4种音．

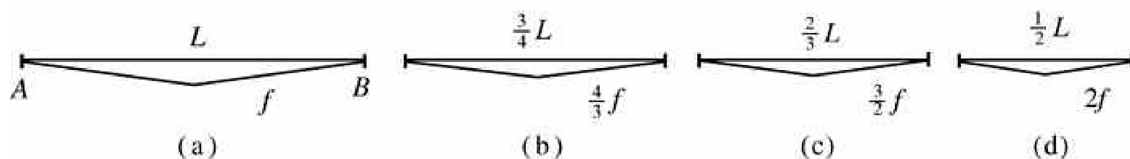


图　**5-10**

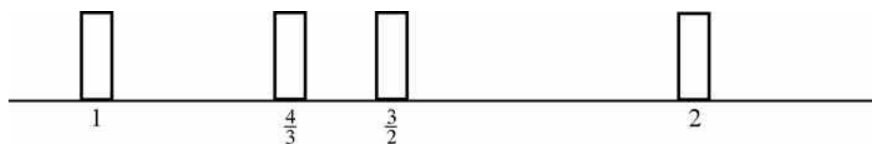


图　**5-11**

让我们继续增加音．转到图5-10(c)中长为$\frac{2}{3}L$的弦．图5-12继续图5-10中的策略．它绘出了长为$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}L\right)=\frac{4}{9}L$、$2\left(\frac{4}{9}L\right)=\frac{8}{9}L$和$\frac{2}{3}\left(\frac{8}{9}L\right)=\frac{16}{27}L$的弦．假设基准音的音高为1，则这3根弦发出音的音高分别为$\frac{9}{4}$、$\frac{9}{8}$和$\frac{27}{16}$．在图5-13中，新加入了两个音．正如图5-10中的情况，图5-12(b)和图5-13(c)中的弦音都是图5-12(a)中的弦音的和音．但图5-13中，并不是所有的音都两两是和音．有的两个音一起听并不悦耳．从一定程度上说，这是偏好的问题，但通常只有两个音的频率是简单的数字比例关系时，这两个音一起听才悦耳．音高为$\frac{9}{8}$的音是音高为$\frac{27}{16}$的音的和音，因为$\frac{9}{8}$是$\frac{27}{16}$的$\frac{9}{8}\times\frac{16}{27}=\frac{2}{3}$．但音高为$\frac{27}{16}$的音不是基准音的和音，因为$\frac{16}{27}$（1除以$\frac{27}{16}$）是一个比较复杂的比率．

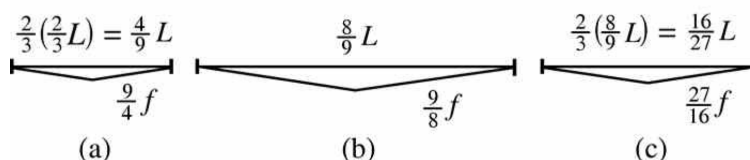


图　**5-12**

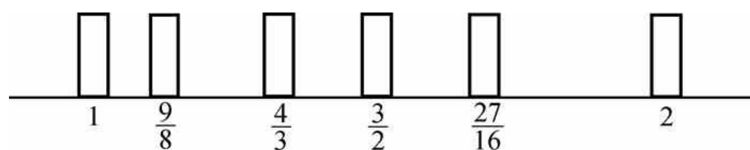


图　**5-13**

通过在两个连续谐波之间填写音符，我们就创造了音阶．如果你从电影《音乐之声》（*The Sound of Music*）中上过音乐课，如果将我们的基准音进行调整，将其记做音符*do*（通过使弦受到正确的拉力），你就能拨弦弹奏，或者按钢琴琴键演奏，图5-13中的音符从左到右为

do　*re*　(*mi*)　*fa*　*so*　*la*　(*ti*)　*do*

音符*mi*和*ti*没在我们的音阶中，但可以继续采用以上所描述的过程来产生．加上*mi*和*ti*，从*do*到*do*共有8个音符，这就是我们所说的8度音阶．

不管你是演奏、唱歌，还是二者都不做，事实上，毕达哥拉斯学派的这一方法给出了比率1∶2、2∶3、3∶4、8∶9和16∶27．这些比率构成了阿尔伯蒂的建筑比例理论的基础．他从2∶3得到4∶6、8∶12、16∶24和32∶48．从3∶4，他得到6∶8、12∶16、18∶24和24∶32．从8∶9，他得到16∶18和32∶36，从16∶27，他得到32∶54．将这些数连接起来，他得到序列

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54$$

当文艺复兴时期的建筑师在建筑物空间布局中使用这列数字时，他们清楚自己正在把上帝赋予宇宙的和谐秩序同样的赋予他们的设计．

安德里亚·帕拉迪奥是文艺复兴后期的建筑大师，他使用维特鲁威的基本几何形状和阿尔伯蒂从毕达哥拉斯学派的音乐比率中所收集的数字，在他的建筑物设计中融合了平衡、比例和支配一切的秩序．

5.3 帕拉迪奥圆厅别墅和教堂

雕塑家和石匠大师安德里亚·帕拉迪奥（1508—1580）受到当时属于威尼斯共和国的城市维琴察的伯爵的雇佣．这个伯爵也是一名杰出的学者和业余建筑师．帕拉迪奥参与了为伯爵建造别墅的工作，成为他的智囊团中的一员．在当时，帕拉迪奥被伯爵视为良师，开始展现出他作为建筑师的才能．他在参观罗马时研究了古代和文艺复兴时期的建筑，从中获得知识，使设计很快走向成熟．帕拉迪奥提炼并再次阐明文艺复兴建筑的实践，从而创建结构及其构件，使其彼此和谐，成为一个 整体．

帕拉迪奥收到的第一个公共委托旨在使维琴察内的中世纪市场和市政厅面貌一新．他围绕旧结构建造了一座精美的能起到支撑作用的外部框架．如图5-14所示，他的设计中主要的元素是重复出现的隔间，每个隔间包含一个由一对小型柱子支撑的中央拱券以及每边一个的圆形开口．隔间由较大型的爱奥尼亚式壁柱分隔．角落处的隔间没有圆形开口，看起来更坚固，给它的外表增加了力量．19世纪，该结构被盖上新屋顶．



图**5-14**　帕拉迪奥为维琴察巴西利卡、中世纪市场和市政厅修建的外

部框架，**1549**．**GvF**摄

图5-15中的基耶里凯蒂宫是他后期收到的委托，立面包括3部分，一个突出的中央部分和它旁边两个对称的部分．底层为多立安式柱廊，二层为平行的爱奥尼亚式柱子所支撑的柱廊．上层中间部分的外墙往前突出一些，这就增加了宫殿主厅的尺寸，为旁边的两个凉廊（由柱子围出的开放空间）营造出空间．帕拉迪奥的设计规定宫殿底层房间的尺寸为12×18、18×18和18×30旧威尼斯尺（一旧威尼斯尺比我们如今所用的英尺要短一点），中央门廊的房间及门廊后面的大厅为16×54威尼斯尺．注意，只有30不在阿尔伯蒂从毕达哥拉斯学派的音乐比率中所吸收的数字序列中．



图**5-15**　维琴察的基耶里凯蒂宫，**1550~1552**．**Ivon Bishop**摄

16世纪中期，威尼斯共和国启动一项经济改革计划，挽救它所面临的日渐衰落的商业命运．这项计划的一个内容是呼吁有才干又有钱的行政人员在威尼斯乡村建立并管理农业庄园．接受这一挑战的贵族需要一种新型结构，它要将功能应用与优雅的氛围相结合，要豪华气派，但又不能

太昂贵，它还要能同时容纳他们的家人、农夫、农具及家畜．帕拉迪奥建造的别墅就响应了这一需要．现在它们还剩下19座．帕拉迪奥会先建造两座或三座设计风格相似的别墅，然后就转向完全不同的风格．所有的这些别墅都是古典风格，布局平衡、外形雅致．

埃莫别墅展示了帕拉迪奥的建筑经常表达的部分分层的概念．中间部分是建筑的主要部分，占据了主要空间．图5-16说明人们注意力被通道及台阶、门廊的柱子和三角形山花所吸引．图5-17和图5-18证实别墅的中央部分比朴素的侧厅高，也更优美，它按比例关系与侧厅联系在一起．埃莫别墅是阿尔伯蒂关于建筑比例应遵循音乐比率法则的一个例证．参见图5-19帕拉迪奥的平面图，注意带拱廊的侧厅房间的长度序列为12、24、48，宽度为20（均以威尼斯尺为单位）．再注意中间部分房间的尺寸（还是以威尼斯尺为单位）为16×16、16×27、27×27和12×16（12被错写成2了）．所有的这些数字都出现在阿尔伯蒂从毕达哥拉斯学派音乐比率中得出的数列中．帕拉迪奥所绘的建筑平面图和立面图所用的尺寸是理想尺寸，与完成后的建筑不同．这种不同可以由下列事实来解释，即帕拉迪奥需要根据在施工现场遇到的特殊情况作出调整．不过调查表明，埃莫别墅的各种尺寸与帕拉迪奥的平面图规定的尺寸非常接近．例如，中间部分的大房间的尺寸与平面图中的只差几英寸．



图**5-16**　威尼斯北部的埃莫别墅的中间部分，**1555~1565**．**Marcok**摄



图**5-17**　帕拉迪奥的埃莫别墅的立面图，选自帕拉迪奥的《建筑四书》．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室



图**5-18**　埃莫别墅，中间部分和侧厅．**Hans A. Rosbach**摄

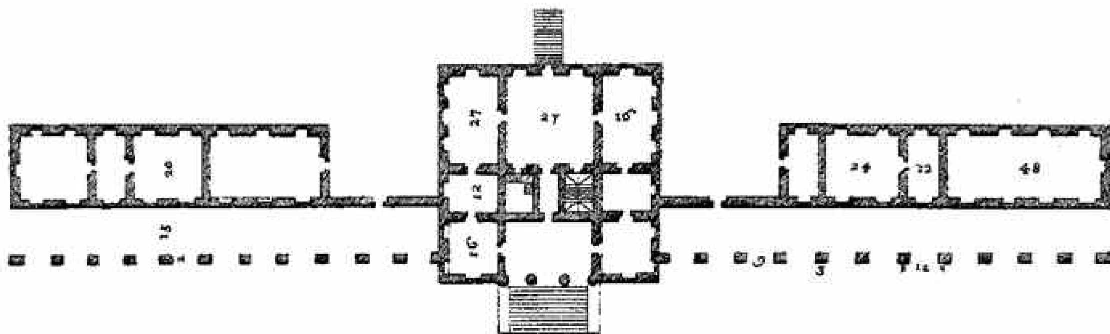


图**5-19**　帕拉迪奥对埃莫别墅的规划，选自帕拉迪奥的《建筑四书》．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

圆厅别墅是帕拉迪奥设计的最著名的别墅．它就在维琴察市郊的一座小山的山顶上．它不是一座农庄，而是为退休的教会显贵建造的住宅．它的核心是一个位于中心的两层圆柱形空间，由穹顶所覆盖．用意思为圆的意大利单词给这一别墅命名为La Rotonda．图5-20展示了两个门廊及其爱奥尼亚式柱，它们分布在该建筑的全部4个侧面．这是一种简洁有力的布局，受到罗马万神殿的启发，几个世纪以来，被照搬过许多次．

帕拉迪奥向维特鲁威的正方形和圆寻求其比例方案．在图5-21帕拉迪奥设计的平面图的中心是圆形大厅的圆，其直径为30威尼斯尺．内圆和主结构外部的正方形分别用黑色和灰色着重表示．角落处的4个矩形房间也用黑色着重表示．它们的尺寸，在平面图中记为15×26，也是根据几何学确定的．图5-22考虑了一个边长为30、高为h的等边三角形．根据毕达哥拉斯定理，$h^2 = 30^2 - 15^2 = (2\times15)^2 - 15^2 = 3\times15^2$．因此$h = 15\sqrt{3} \approx 25.98 \approx 26$，可知所设计的这4个角落房间与图中构造的矩形一致．



图**5-20**　维琴察郊外的圆厅别墅（**Villa Rotonda**），**1556~1567**，**Hans A. Rosbach**摄

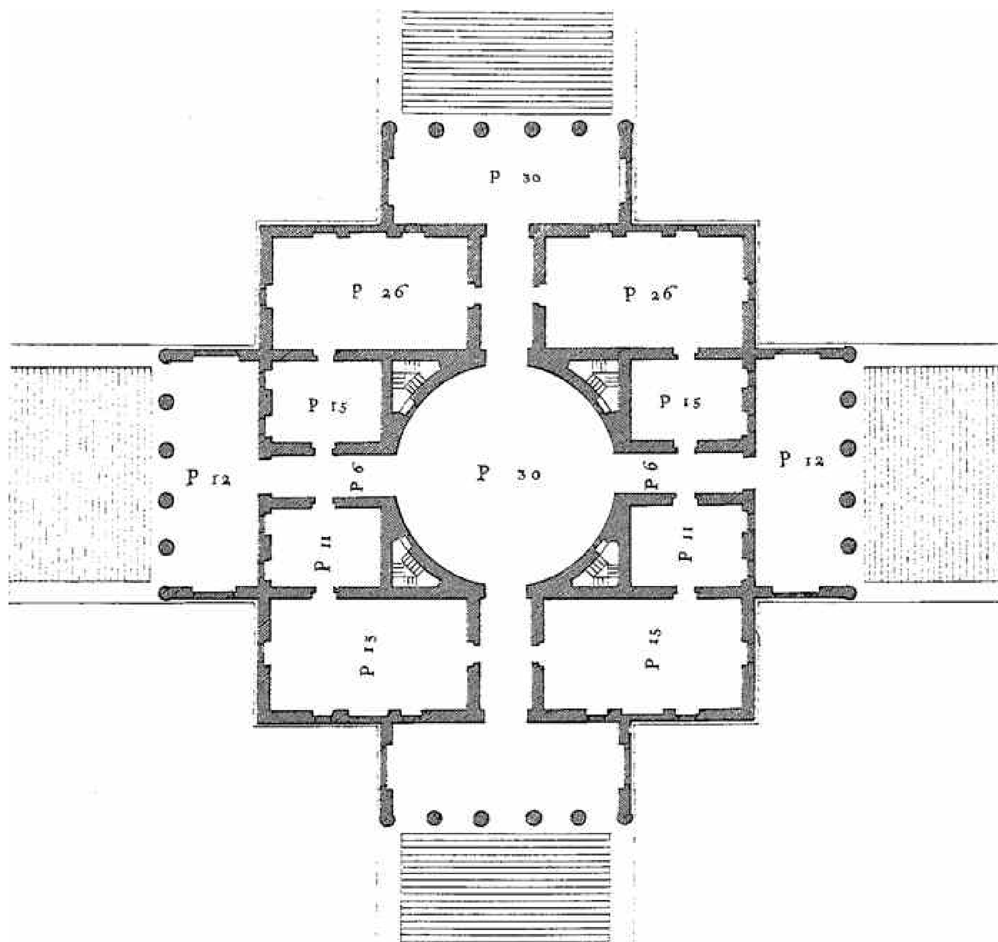


图**5-21**　圆厅别墅的平面图，选自帕拉迪奥的《建筑四书》．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

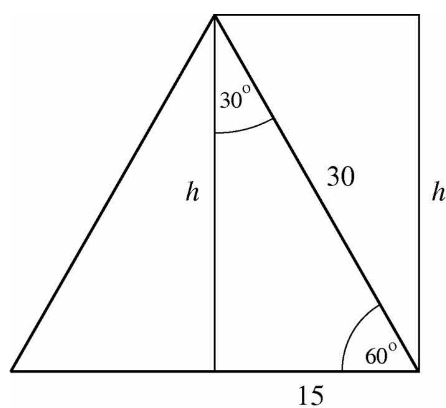


图**5-22**　角落房间的平面图

文艺复兴时期的建筑师相信，每类建筑，不管是私人建筑、公共建筑、宫殿还是教堂，自身都有着内在的逻辑和节奏，存在一种递增的价值秩

序．教堂在价值金字塔的顶部．教堂的规划和建设是建筑师最荣耀的任务．他们的设计必须在概念和每个细节的表达上都是永真性的象征．帕拉迪奥谈到他设计教堂是“以某种方式和比例，使得各个部分均能向观众传达和谐”，他指的是普遍成立的比率所赋予的精确的空间关系．帕拉迪奥被认命在威尼斯建造两座教堂：圣乔治·马焦雷教堂（为纪念殉教徒圣乔治命名）和威尼斯救主堂（救世主耶稣）．每座教堂的设计特点是巴西利卡中殿，十字交叉处上方有一个穹顶，中殿侧面的两个圆形隔间形成短小的耳堂．在威尼斯救主堂中，十字交叉处和两个隔间在祭坛前面形成一个圆形像剧场一样的空间（这是一个神圣的地方，适合为总督及其随从举行年度纪念弥撒）．两座教堂都矗立在运河河畔，非常显眼．这意味着它们的立面设计不仅要与外部还要与内部角色相对应．一方面，它要代表在公共广场的教堂；另一方面，它还要与高大的中殿及其内部较低矮的侧翼相协调．对此帕拉迪奥的作法是再次向万神殿寻找灵感，包括外部（图2-42）和内部（彩图5）元素．两座教堂的立面极其相似．图5-23展示了威尼斯救主堂的立面．两座像宣礼塔一样的尖塔耸立在威尼斯救主堂穹顶的两侧，无疑受到伊斯兰的影响（特别是奥斯曼的影响）．两座教堂的施工在帕拉迪奥的监督下启动，圣乔治·马焦雷教堂始于1565年，威尼斯救主堂始于1576年．二者都在帕拉迪奥去世后很长时间才完工．



图**5-23**　威尼斯救主堂，**1576~1592**．**Han A. Rosbach**摄

帕拉迪奥于1570年在威尼斯出版了他的著作《建筑四书》．该书讨论了古代建筑传统，采用了阿尔伯蒂和与帕拉迪奥同时代人的观点，不过它的重点是介绍和解释他自己的设计．图5-17、图5-19和图5-21展示了《建筑四书》的木版画．这部影响深远的著作还着手确立建筑柱式（见讨论5.1），并涉及设计和工程以及城市规划方面的内容．它是为执业建筑师撰写的书，强调实践技术．因此《建筑四书》告诉我们“建筑与所有其他艺术一样是对自然的模仿”，这里的“自然”既指结构合理性，又指设计实用性．

帕拉迪奥，以及他的专著和他巧妙构思与施工的建筑物都对西方建筑的发展产生了巨大的影响．新古典主义元素中的对称、有柱子的立面在世界各地的许多住宅、公共建筑及教堂占主导地位，它们的设计都可以追溯到帕拉迪奥的作品．

5.4 达芬奇和布拉曼特：圆形设计为主的教堂

莱昂纳多·达芬奇（1452—1519）是一名绘画大师、军事工程师、机械装置发明家以及自然活动的敏锐的观察家和记录员．在他的笔记本里充满了关于机械装置、湍急的水流、地质层、飞翔的鸟、运动的马以及人体解剖学（通过对尸体的详细解剖得出）研究的精美插图，这说明他理解这些复杂结构和有机体的活动机理．笔记本中还有设计巧妙的升降机和起重机的素描，这使人们一般误认为达芬奇是这些装置的发明人，而实际上它们是由布鲁内莱斯基发明的，用于帮助他建造圣母百花大教堂的穹顶．15世纪80年代至90年代期间，达芬奇作为常驻专家，为米兰大公服务．他为大公所做的工作包括设计在盛大的宫廷庆典上用的服装和舞台机械、研究大型骑马雕塑以及制定将其用青铜进行浇铸的详细计划．（实际上这座雕塑从未进行制作．由于法国的攻击日益迫近，大公转而将数十吨青铜用来铸造大炮．）在米兰的期间，达芬奇还找时间绘制了著名的《最后的晚餐》，并将其天才才能明显地延伸到数学和建筑领域．

达芬奇在建筑方面的兴趣受到大公邀请到米兰的其他两位知名人士的激发．其中一位是弗郎西斯科·迪乔治（1439—1502），他是一位锡耶纳的画家、雕塑家、建筑师及工程师．人们认为他为梵蒂冈大臣官邸（见图5-3）的建造作出了贡献．另外一位是建筑师多纳托·布拉曼特（1444—1514），他一度被认命为米兰的一座教堂完成扩建工作，并重新建造另一座．这3个人互相熟悉，交流分享他们在建筑设计方面的观点．3人都被请教过当时仍在建造中的伟大哥特式教堂——米兰大教堂十字交叉处上方拱顶的问题．（见3.5节．）达芬奇对拱顶的设计如图5-24所示，让人们觉得他清楚侧推力且知道它们需要如何向下进行引导．达芬奇的设计没有被接受．他朋友的也没有被接受．

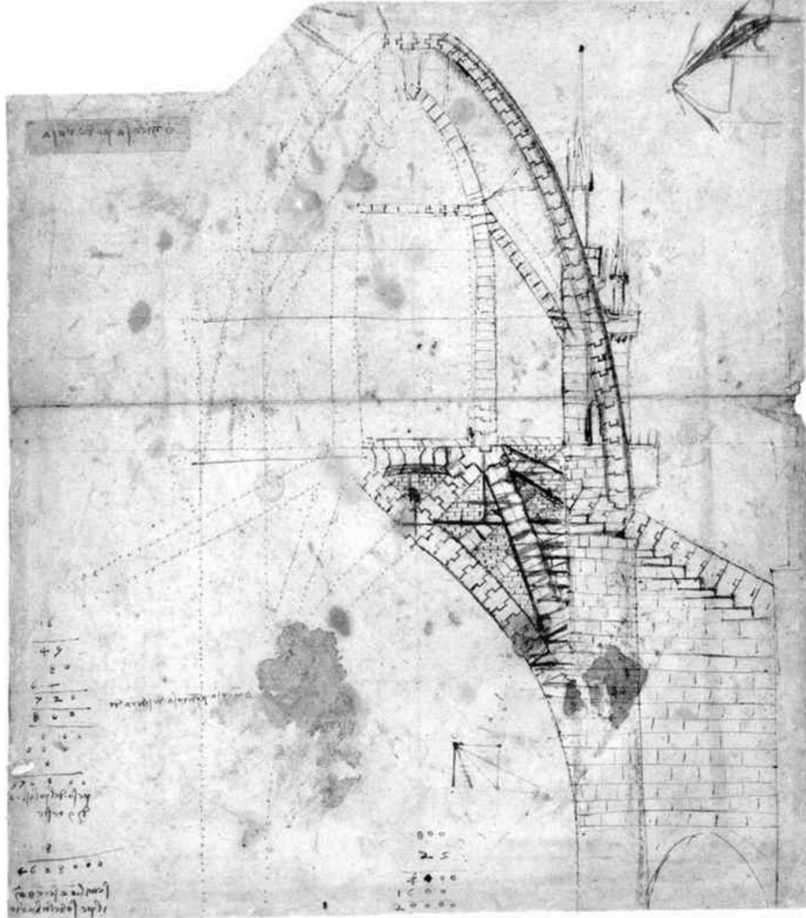


图**5-24**　莱昂纳多·达芬奇对米兰大教堂拱顶研究的细节，**1487**．《大西洋古抄本》（***Codex Atlanticus***），第**850**张对开页的右图．版权归米兰的**Veneranda Biblioteca Ambrosiana**、**De Agostini Picture Library**所有

和他们的前辈阿尔伯蒂一样，达芬奇、迪乔治和布拉曼特相信教堂的理想设计并非传统的矩形巴西利卡式，而是圆形的．在这种形式中，主要的结构部件从中心向外辐射．作为完美的象征，他们认为圆是对上帝的完美几何学的表达．

迪乔治为设计这类教堂画出了各种模板．图5-25分析了他的构图．先从一个正方形入手，用3根竖线和3根横线将其细分为16个相等的正方形．图5-25(a)展示了正方形及其内部由细分所确定的圆．角落处的4个正方形确定了沿原来正方形对角线方向的两个相交的矩形．迪乔治给这两个对角矩形的顶端加上半圆．这些加了半圆的矩形在图5-25(b)中用灰线表示．接着迪乔治画出了水平和竖直矩形，并给每个矩形加上了两个半圆

（这些半圆落在原来正方形的外面），这样就形成了图5-25(b)中的中心十字形状（同样用灰线表示）．加上十字所确定的内圆就完成了迪乔治的模板．这两个圆就位于教堂拱顶的鼓座处．它们与最里面的正方形一起还指出了4个支撑墩柱的位置，并设置了它们的宽度．正如在哥特式建筑中一样，几何学又一次充当了重要结构问题的指南．达芬奇的几种圆形教堂的设计如图5-26所示．注意，达芬奇的设计与迪乔治的模板之间存在某些相似之处．

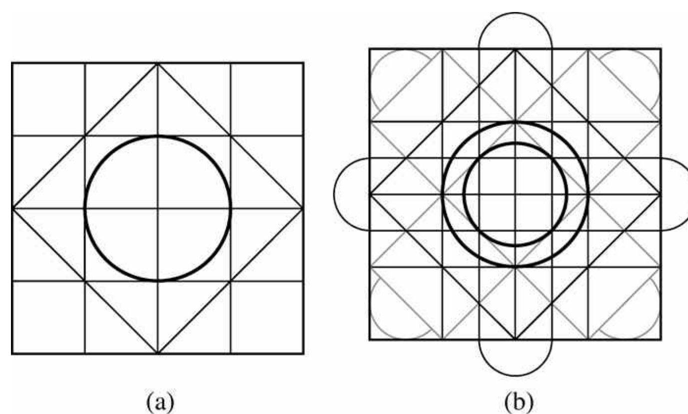


图**5-25**　弗郎西斯科·迪乔治，设计圆形教堂的模板，**1489~1492**

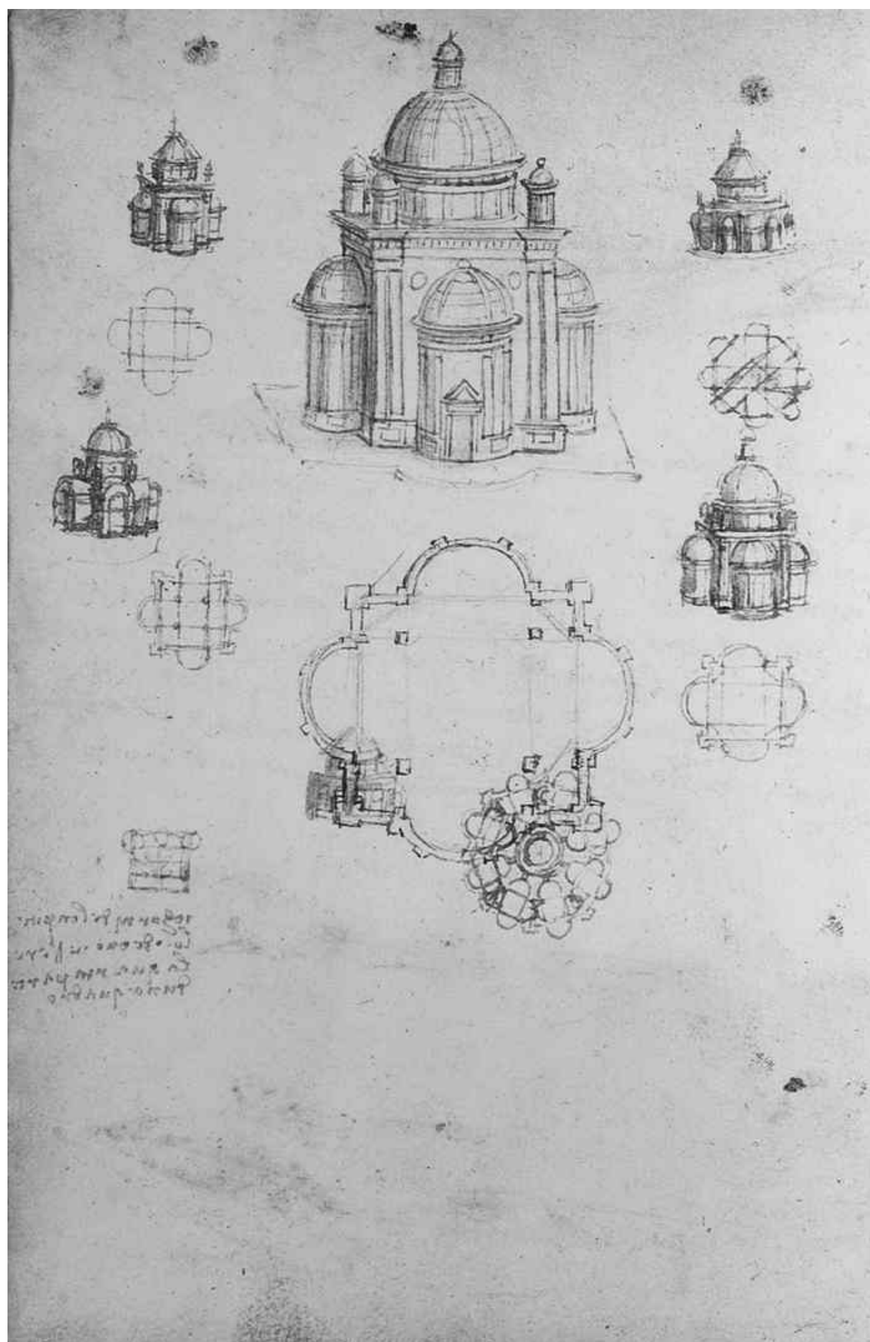


图**5-26**　达芬奇对圆形教堂的设计，约**1490**年．法兰西学院图书馆，法兰西学院，巴黎

僧侣及数学家卢卡·帕乔利（1445—1517）受大公的邀请开始在米兰宫廷任教，达芬奇有机会加深自己对数学理解．帕乔利已出版了他的作品《概要》（*Summa*）一书，该书是对当时所能获得的数学知识的全面总结．这部作品的内容几乎都在欧几里得和斐波那契的作品里出现过（见

4.2节），但它的传播更为广泛．在帕乔利的指导下，达芬奇通读了欧几里得《几何原本》的13卷全书，在他的两本笔记本中充斥着对其内容的评论．帕乔利那时正在写作一本书，在该书中他提出了神圣比例（见2.2节）及其与人体的关系．他追随阿尔伯蒂，坚持认为建筑师在设计神圣建筑时，需要使用人体所展示的比例．这本书后来以《论神圣比例》（*Divina Proportione*）为题出版，书中还讨论了正多边形和5个柏拉图立体（见讨论4.1）．书中包含60多幅插图，据称其作者为达芬奇（见问题14），它们被认为是达芬奇生前唯一得到出版的素描．

达芬奇自己还从事数学研究．他在《维特鲁威人》（见图5-4）中捕捉到了圆和正方形，它们构成了他的圆形教堂的设计基础，并成为他的数学研究对象．他的笔记本中有许多由相交的圆和正方形组成的图例．其中有许多各种形式的新月状、玫瑰花状及植物图案，可能是想要表明自然现象千变万化的形式和节奏．他的一个研究例子如下所示．

达芬奇考虑一个半径为r的圆，将4个半径为$\frac{1}{2}r$的圆放在它的里面，考虑这些圆所确定的叶形图案．图5-27展示了两种变化．注意图5-27(a)和图5-27(b)中的叶子的总面积相同．达芬奇按以下的思路计算这一面积．转向图5-28．令G和W分别为图5-28(a)中灰色花朵及白色区域的面积．注意到有

$$\frac{1}{2}G+\frac{1}{4}W=\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2$$

可知$G+G+W$等于半径为$\frac{1}{2}r$的4个圆的面积．考虑图5-28(b)，令D为深灰色区域的面积．观察一下这个图，可知$G+W+D$等于半径为r的圆的面积．结合这一知识，达芬奇得到

$$G+G+W=4\left(\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2\right)=\pi r^2=G+W+D$$

可得$G=D$．现在取灰色花朵的半个花瓣，共有8个，将它们如图5-29(a)那样移动．浅灰和深色区域的总面积为$G+D=2G$．根据图5-29(b)和毕达哥拉斯定理，达芬奇得到

$$2G = G + D = \pi r^2 - s^2 = \pi r^2 - 2r^2 = (\pi - 2)r^2$$

这就是图5-27(a)和图5-27(b)中叶形图案的面积.

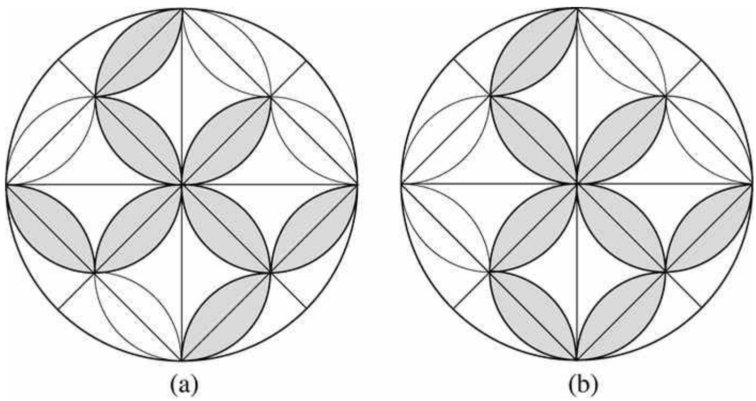


图**5-27**　达芬奇的变化图案.《大西洋古抄本》，米兰安波罗修图书馆，改编自第**455**张

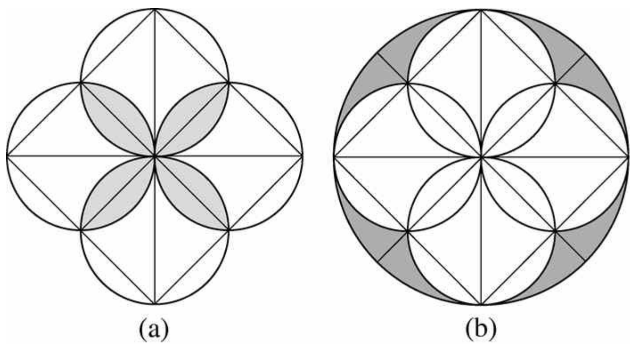


图**5-28**　达芬奇的叶形几何学

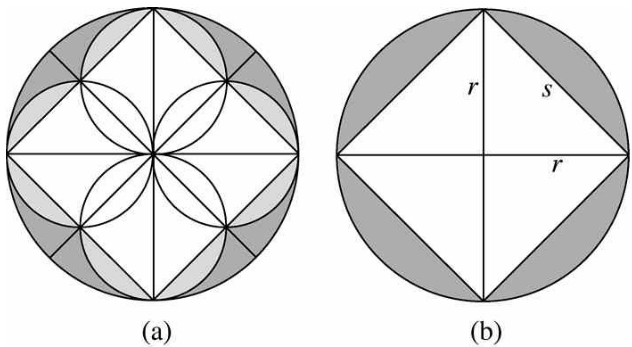


图　**5-29**

米兰大公圈内的杰出人才很快星散了. 弗郎西斯科·迪乔治回到了锡耶

纳，在那里他为锡耶纳大教堂的高祭坛创作了两座华美的青铜天使像．随后，1499年法国的入侵结束了大公的统治，将布拉曼特、达芬奇和帕乔利驱逐出该城．达芬奇和帕乔利先是逃到威尼斯，接着到达佛罗伦萨．而我们的叙述将跟着布拉曼特来到罗马．他曾一度接受西班牙的伊莎贝拉皇后和费迪南德国王的委托，在据称是圣彼得殉教的地方建造一座纪念碑．布拉曼特的成果是坦比哀多．图5-30告诉我们坦比哀多是一座圆形的小型纪念碑，被多里安式柱子所构成的圆形柱廊围绕（直径仅为7.62米），上面被穹顶所覆盖．引人注目的是它对古典形式的优雅简洁的阐释．不同的雕刻元素所构成的光和影增加了建筑深度．其对空间和物质的动态强调是布拉曼特设计的典范．我们将在第6章看到坦比哀多对建筑发展的影响是多么深远．



图**5-30**　布拉曼特在罗马建造的坦比哀多，**1502**．**Marpet**摄

到15世纪中期，圣彼得大教堂（见图3-13）几乎已一成不变地矗立了一千多年，情况看起来很差．阿尔伯蒂那时是教皇的建筑师，他报告说教堂的一面墙有坍塌的危险．这次评估使人们制订计划，对旧教堂进行大量修复并扩建．不久，现存的后殿被一座经过扩建的拱形后殿和高坛所代替．不幸的是——这在圣彼得大教堂的历史上一次次上演，当教皇死后，这项建设工作也随他而去．又过了半个世纪，圣彼得大教堂的主要

工作才得以恢复．16世纪早期，教皇尤里乌斯二世掌管了罗马的宗教和世俗事物，这座城市逐渐成为意大利半岛和欧洲的艺术中心．教皇的注意力很快转移到圣彼得大教堂．人们本来以为老教堂的核心部分会完整地保留下来，因为这里是圣彼得坟墓所处的圣地，是基督教创立的神圣遗址．所以当尤里乌斯二世决定用一座全新的教堂代替旧圣彼得教堂时，人们大吃一惊．这一决定受到激烈的批评，但教皇固执己见，他认为应该有一座新的圣彼得大教堂来与古罗马最伟大的作品相抗衡并超越它．教皇一度被布拉曼特的作品打动，因而让他主管圣彼得大教堂项目．

布拉曼特构思出一座将十字象征和中心几何学相结合的结构．他的设计将希腊十字互相垂直的4个等臂与正方形和圆结合起来．4个后殿从中心向外辐射，它们对称地伸出，象征着地球的4个角．大穹顶与万神庙穹顶的风格类似，耸立在十字交叉处上空．布拉曼特设计的圣彼得大教堂平面图如图5-31中黑色部分所示．而灰线所示的部分是图5-25(b)中迪乔治的模板．二者间的密切联系说明布拉曼特的设计建立在迪乔治的模板基础上．

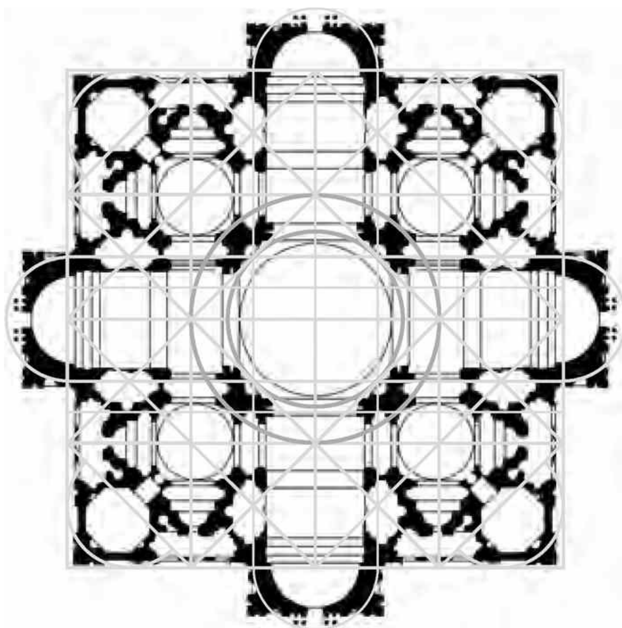


图**5-31**　布拉曼特的罗马圣彼得大教堂平面图，**1505**（内附弗郎西斯科·迪乔治的模板）

布拉曼特很快就意识到他为新圣彼得大教堂设计的主墩柱不够结实，不能支撑他想要建造的大型穹顶．图5-32中修改的设计用白线描绘，展示

了布拉曼特的3根粗壮得多的墩柱（横截面内的圆代表螺旋形楼梯）和保持原来尺寸的第四根墩柱的轮廓．它还用白色框出了图5-31内布拉曼特原始设计中的一些构件及具有宏伟理念的大型半圆．最后，它用白虚线描绘了旧圣彼得大教堂以及15世纪的后殿和高坛轮廓．

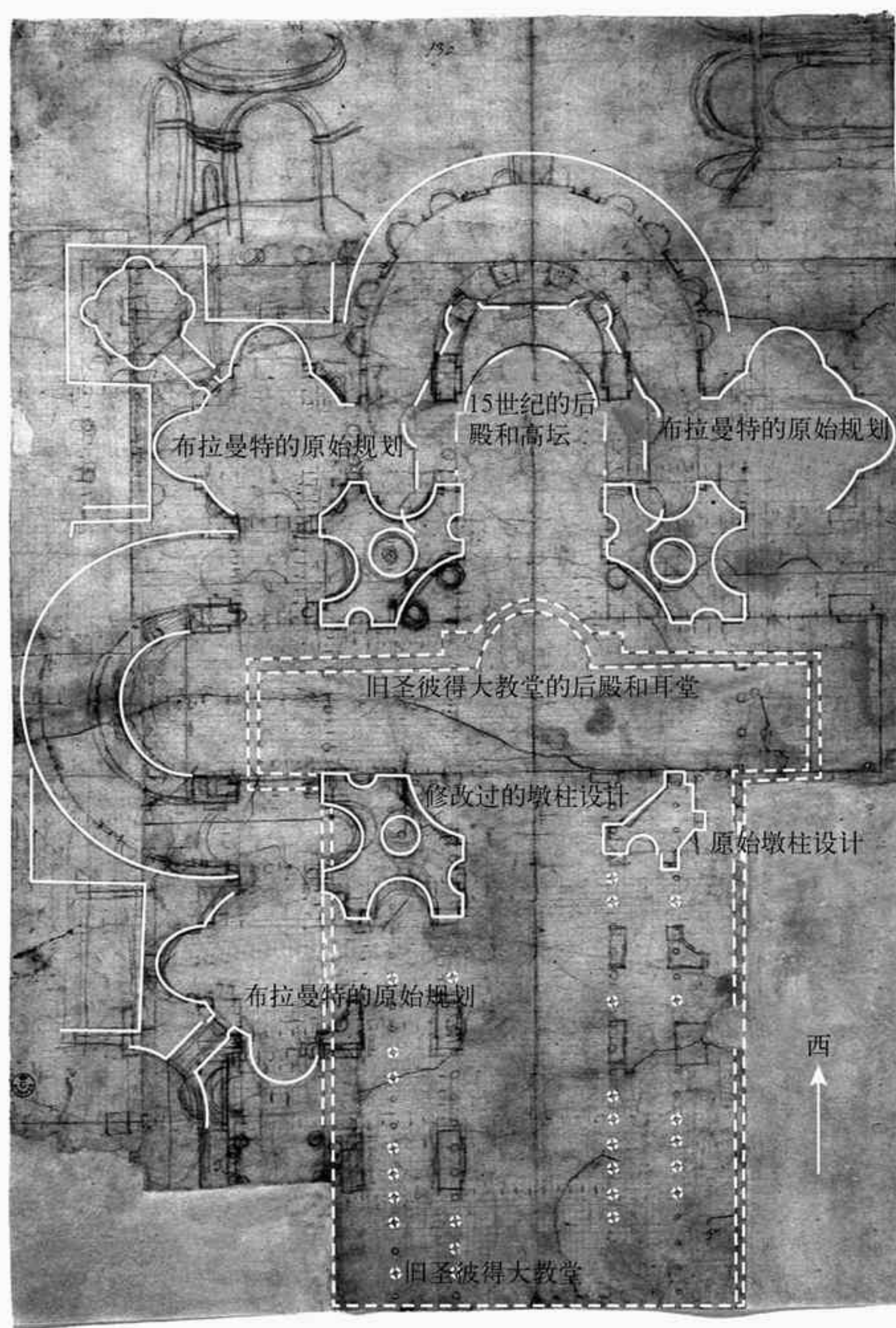


图**5-32**　布拉曼特修改过的平面图，约**1505**

该教堂于1506年开始施工．圣彼得的坟墓是神圣的，而教会礼拜活动也要继续进行，因此，布拉曼特将坟墓上方的主祭坛用一座保护结构进行遮盖．但对旧墓和供奉的壁画及马赛克的破坏无可避免，因此布拉曼特逐渐被人们称为Il ruinante（意大利语，意为“破坏者”）．新圣彼得大教堂进展迅速．仅仅几年之后，布拉曼特就竖起了4根巨型主墩柱并将其用高耸的带镶板的拱券连接起来．这是新教堂的中央核心部分．大型穹顶的稳定将依靠于这一核心及其周围拱形结构所提供的支撑．后续每个建筑师的工作都必须与布拉曼特设计的中心结构一致并从这里开始进行．与哥特式教堂中殿的施工不同，新圣彼得大教堂的建造不能一次完成一个隔间．

这一规模和复杂度的项目需要如今我们称为建筑公司的组织机构．圣彼得大教堂的组织机构为圣彼得大教堂工坊．直接向教皇汇报的红衣主教负责监督．建筑大师负责项目执行并管理石匠、工匠、技术人员和体力劳动者．工坊协助施工持续可靠地进行，并对此进行记录．

5.5　米开朗基罗的圣彼得大教堂

1514年布拉曼特去世后，拉斐尔成为新的建筑大师．有可能正是布拉曼特构想的新圣彼得大教堂被拉斐尔选为他的《雅典学派》中伟大人物聚会的场所，见彩图20．在《艺苑名人传》（*Lives of The Artists*）中，16世纪的画家、建筑家、历史学家和传记作家乔尔乔·瓦萨里（1511—1574）断言布拉曼特实际上设计了拉斐尔的湿壁画中的建筑场景．拉斐尔对圣彼得大教堂项目几乎毫无影响．大教堂的工作因西班牙哈普斯堡王朝（忙于和法国进行权力斗争，争夺对意大利城邦的控制）的军队对罗马的毁灭性占领以及大型建筑花销所造成的持续财政困难而陷入停滞．对比艺术家在16世纪30年代对施工现场的素描与布拉曼特已完成的建筑，发现工程只得到极小进展．拉斐尔确实影响了建筑中的设计工作．在对该建筑的素描中，他给出了底层平面图、立面图和截面图．直到后来这才成为建筑界的标准做法．

安东尼奥·桑加洛（1484—1546）于1534年接管了建筑大师一职．他更多以专业技术而非创造能力著称．在桑加洛的领导下，重要的施工得以恢复．桑加洛意识到即使布拉曼特设计的更粗壮的主墩柱也还是太不结实，他用墙堵住墩柱凹进去的部分，对它们进行加固．通过给布拉曼特设计的墩柱及连接拱券加上4个帆拱，他完成了中心结构，之后圣彼得大教堂的鼓座和穹顶将从这里竖起．桑加洛还建造了东部和南部的二层墩柱及把它们与中心结构相连的筒拱顶．他将南部后殿的半圆形墙——这种墙称为半圆室（hemicycle，在希腊语中，hemi意为“半”，cycle意为“圆”）——砌到一楼楼顶．桑加洛对圣彼得大教堂的构想甚至比布拉曼特设计的更恢宏精美．在图5-32布拉曼特的设计之外，新的半圆形区域内要求有礼拜堂和走廊．桑加洛为这些新空间修建的墙壁逐渐蚕食了梵蒂冈的其他建筑．到1546年桑加洛去世之时，该结构预期达到的规模和复杂度以及实际花费已完全失去了控制．

教皇要求并不怎么情愿的米开朗基罗来接管教堂的施工．米开朗基罗不能拒绝教皇的要求，但坚持要求全权负责该项目．这位新的建筑大师给新圣彼得大教堂的设计及施工都带来了理性．他加固并打穿了布拉曼特设计中的墙壁结构，将其内部简化为空旷、连续的空间．通过去除桑加洛设计的外墙，他使光线直接射进内部的各个部分．他减小了教堂的尺寸，并且节省了大量的金钱和施工时间．米开朗基罗用了几项巧妙的措施，就替换了图5-31中布拉曼特的复杂布局，在桑加洛的宏伟构想中占

据了主动．米开朗基罗的十字和正方形设计富有凝聚力，合乎理性．它能够实现，也应该进行建造．

图5-33展示了米开朗基罗的设计．阴影、交叉平行线和3个半圆室的轮廓线被加在平面图上，用不同的线来区分施工的建筑师．用浅灰色的交叉平行线画出的区域标出了布拉曼特用来连接他的主墩柱的带镶板的拱券．西侧的后殿和高坛也被绘出轮廓并用浅灰色交叉平行线填充．它们都是15世纪兴建并由布拉曼特完成的．浅灰色单阴影线部分标出了桑加洛在穹顶四周添加的拱顶及帆拱．平面图左边和右边的两条弧指桑加洛开始兴建，后来又被米开朗基罗移除的外墙．深灰色交叉平行线和轮廓线标出了米开朗基罗的作品．他完成了南侧的半圆室，将北侧的半圆室建到二层高并增加了拱顶．教堂上方鼓座的施工及穹顶的设计也是米开朗基罗的工作．（除了最东部，穹顶及现存的拱顶都是由米开朗基罗的助手吉阿科莫·德拉·波尔塔在16世纪80年代和90年代施工完成的．为了与米开朗基罗设计的南部的半圆室一致，他还重建了西部后殿的半圆室．）

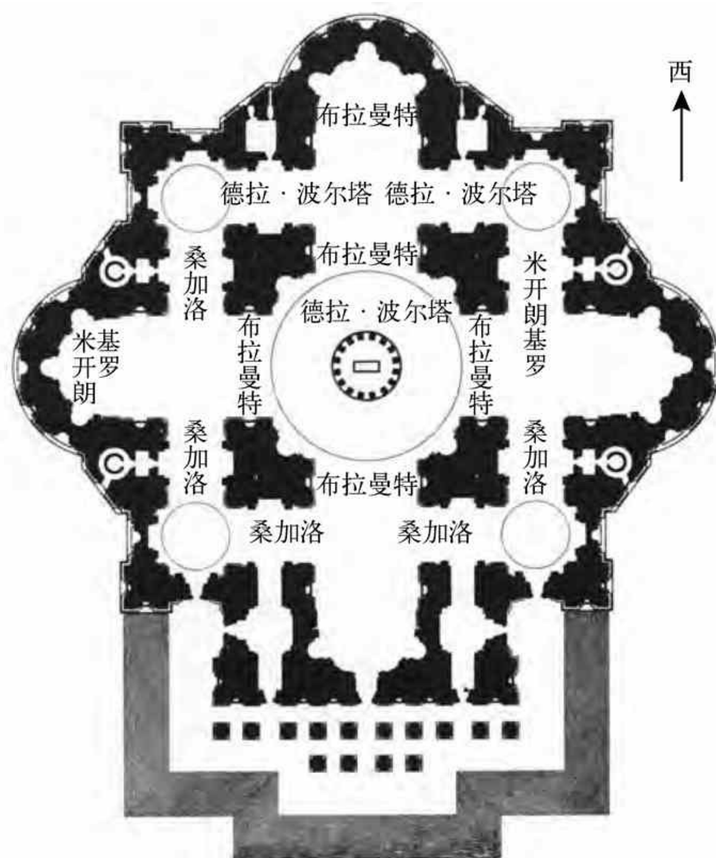


图**5-33**　米开朗基罗为罗马圣彼得大教堂所做的平面图，约始于**1546**

年（添加了阴影和交叉平行线）

2.5节的最后一段指出罗马人用混凝土建造了许多大型结构．混凝土墙一般用砖贴面以便加固并保护外表面．中世纪建筑则用石块（砖是便宜的替代品），而并不是按罗马人那样方便地使用混凝土．布拉曼特在圣彼得大教堂设计（见图5-31）中的墙壁结构有许多凹进去和不规则的地方，这显然表明他已重新发现了罗马人用混凝土的建造方法．混凝土的强度以及很容易塑造成型的优点更利于实现这些复杂的墙壁结构的施工．图5-34描绘了米开朗基罗设计的南部后殿正面．不只这个正面是弯曲的（遵循弧形的半圆室曲线），它的壁柱、窗户和装饰元素也都位于不同平面上，以不同的角度突出．对米开朗基罗而言，如果没有混凝土—砖结构所带来的灵活性和可塑性（更不用说经济性），不可能获得这样丰富的几何图形．



图**5-34**　米开朗基罗对圣彼得大教堂南部半圆室外墙的设计，上面带有教皇的批准印章，由**Vincenzo Luchino**雕版印刷，**1564**．选自**Henry A. Millon** 和**Craig Hugh Smyth**的**“**米开朗基罗与圣彼得大教堂**I**：原先建筑在南半圆室阁楼的规划笔记**”**（**Michelangelo and St. Peter's I: Notes on a Plan of the Attic as Originally Built on the South Hemicycle**），《伯林顿杂志》（***Burlington Magazine***），卷**111**，**797**期（**1769**年**8**月）

从最开始，新圣彼得大教堂的最大特点就是大型穹顶及其支撑鼓座．它也是施工中最具挑战性的部分．米开朗基罗的理念深受布鲁内莱斯基圣母百花大教堂穹顶的影响．它是唯一能在规模上与之抗衡的原型．米开朗基罗借鉴了它的基础结构部分：开有大窗的鼓座、双层壳构架、拱肋以及顶部加盖采光亭．不过新圣彼得大教堂的穹顶及其鼓座的设计细节需要变化，要根据结构整体来进行定义．图5-35是米开朗基罗（或在他的监督下其助手）进行的研究．注意鼓座外面的双柱是如何与图5-34中正面的成对大型壁柱平行的．米开朗基罗感觉对垂直正面的大力强调应继续进行，它向上经过鼓座的双柱，沿穹顶外部弯曲的拱肋，再集中到作品的焦点即采光亭上．米开朗基罗在圣彼得大教堂的设计中，将圣母百花大教堂穹顶鼓座和拱肋的8重对称加倍到16重，这样就加大了对垂直的强调．穹顶的鼓座于1557年兴建，图5-36展示了它在1562年的施工情况．图中能看到用来保持圆柱形的绳子．1564年，鼓座即将完成之际，米开朗基罗去世，圣彼得大教堂的工作再度中断．

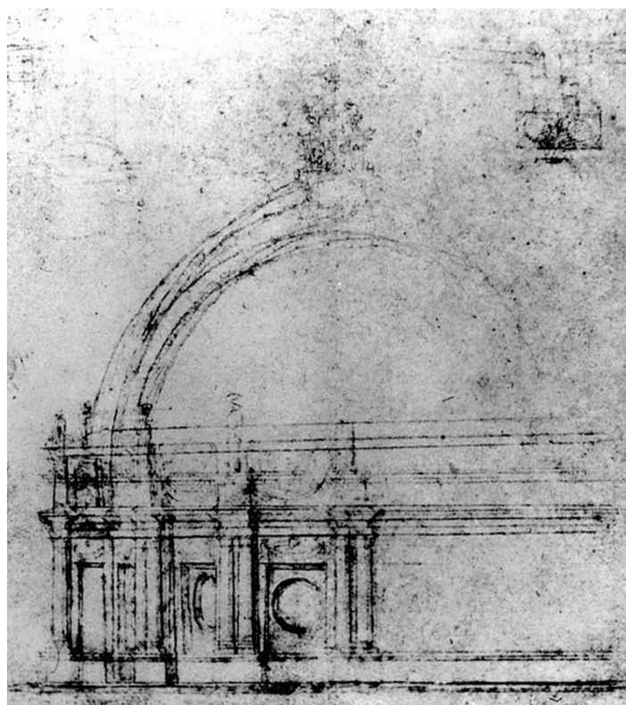


图**5-35**　米开朗基罗设计的圣彼得大教堂鼓座和穹顶的截面图和立面图，法国里尔美术馆．绘于约**1546~1557**年

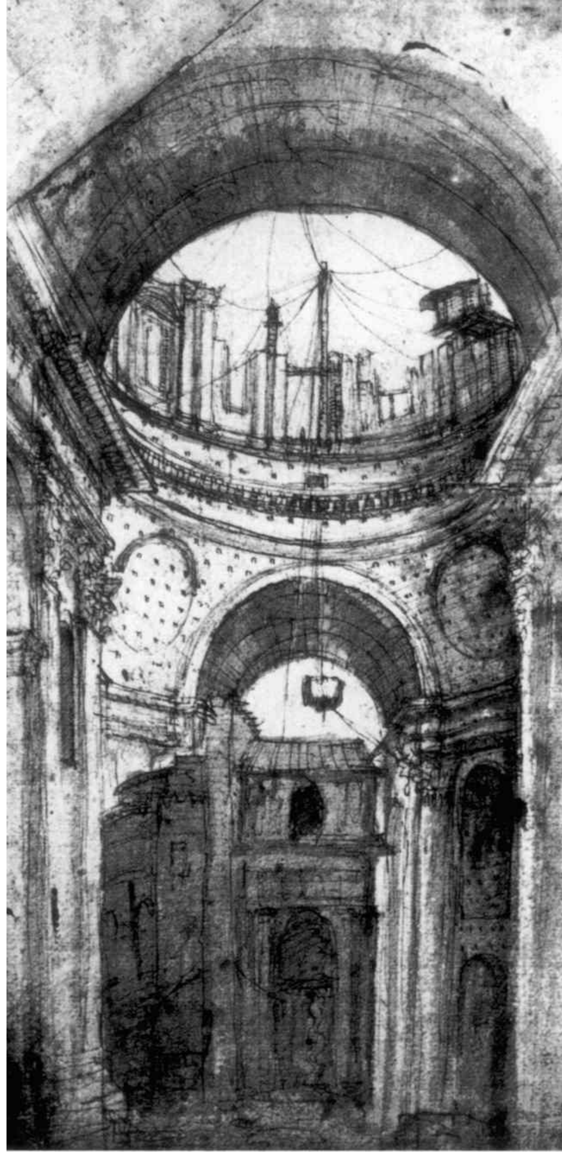


图**5-36　Giovanni Antonio Dosio**，约**1562**年建设中的米开朗基罗的鼓座．（这里能看到布拉曼特建来保护祭坛的结构就在拱顶下面）．选自**Charles B. McClendon**的**“**罗马圣彼得大教堂的建筑历史**”**（**The History of the Site of St. Peter's Basilica, Rome**），***Perspecta***，卷**25**，**1989**

建筑师和雕塑家吉阿科莫·德拉·波尔塔（1533—1602）在1573年接管项目后，工程又继续进行．德拉·波尔塔参与了罗马许多重要建筑的工作，成为罗马16世纪后半叶的主建筑师．德拉·波尔塔重建了圣彼得大教堂的西侧后殿，并在西侧建了拱顶（见图5-33）．西斯科特五世成为教皇后，该项工程进入高速发展的时期．作为教皇中最伟大的建设者，

他批准了德拉·波尔塔的穹顶设计并推动它的建造．德拉·波尔塔保留了米开朗基罗设计的基础，但抬高了穹顶的纵侧面，增加了的穹顶高度使该穹顶更加明显地凌驾于教堂的主结构之上．比较图5-35和图5-37可知，德拉·波尔塔主要通过拉长鼓座并在上面加盖阁楼来获得更大的高度，而穹顶本身的高度则只增加一点．内壳内部的纵向截面图是由两条圆弧所确定的尖拱．因为两个圆的圆心（图5-37中的点P和Q）离得很近，所以这个截面接近一个半圆．实际上，穹顶内部高度与穹顶在起拱线处直径的比值约为0.58．与横截面为半圆的穹顶高度与底面直径的比值0.5相比，它超出的并不明显．（参见问题9）．穹顶外壳的外截面图也是一个尖拱，它比内壳要略微陡一些．

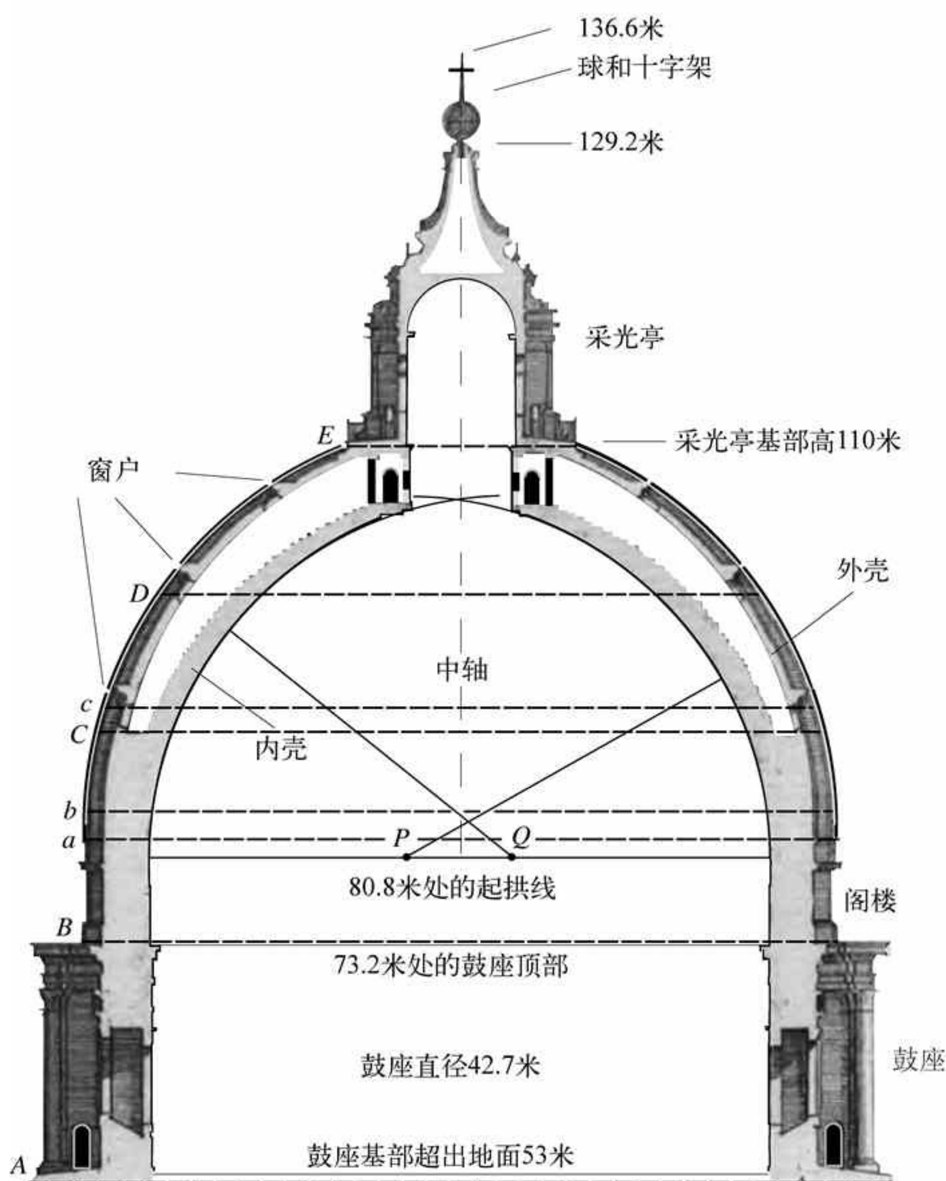


图**5-37**　德拉·波尔塔的圣彼得大教堂穹顶的剖面图，以**Hieronymus Frezza**出版的木雕为基础，**1696**

教皇认命建筑师兼工程师多梅尼科·丰塔纳（1543—1607）协助德拉·波尔塔．穹顶的施工始于1588年，在一段时间内，施工现场有600~800人保证工程不间断地进行．阁楼延续了鼓座的圆柱形状．16条大型砌筑拱肋从阁楼的顶部向上延伸，它们之间距离相等，并都向内弯曲．随着高度的增加，拱肋越来越细，而朝着穹顶垂直轴方向的横向厚度则越来越大，从基部的约1.8米增加到顶部的约4.9米．图5-38展示了穹顶形状的变化情况．穹顶的内外壳用砖、石灰块和灰泥建造，它们都在支撑拱肋之间的16块曲面内，其高度同步增加．它们的水平截面并不是正十六边形（像布鲁内莱斯基的穹顶的八边形横截面图所展示的那样），而是被建成圆形，与鼓座和阁楼的横截面一样．内壳约为2米厚，外壳约为0.9米厚．3个铁环被砌进并围绕穹顶一周，其中两个比阁楼稍高，另一个稍高于两个壳的分离点．这些铁链的横截面约为6.35×6.35平方厘米，用来限制巨大的向外的侧推力．图5-37中铁链用虚线表示，记为*a*、*b*和*c*．（图中的其他铁链是很久之后又增加的．）

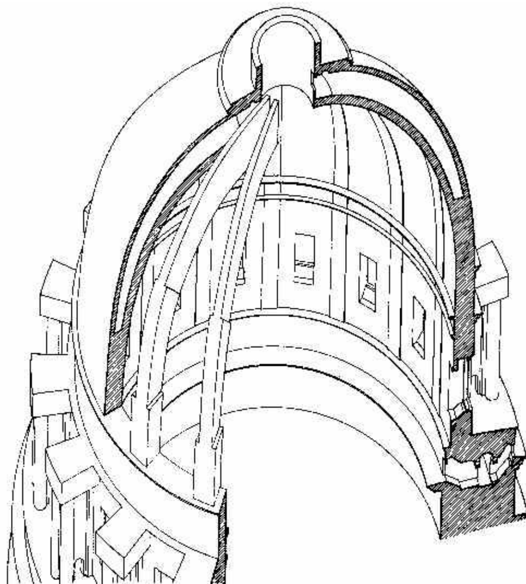


图**5-38**　穹顶结构示意图，**F. Nespoli**绘

令人难以置信的是，这个穹顶不到两年就建成了．木制拱鹰架由从阁楼上方内侧墙上的支撑点斜向上伸出的梁所承载，支撑着对壳的建造．回忆一下，布鲁内莱斯基在佛罗伦萨竖立穹顶时，没有使用拱鹰架．那为什么不遵循这一先例？因为德拉·波尔塔知道他的穹顶会比佛罗伦萨的

扁平，而且建造速度将更快．布鲁内莱斯基的穹顶更陡，这意味着它的壳中连续的八边形砖层会得到其底部已完成结构的更多支撑．他的穹顶历经16年才完工，这就使其在承受大负载之前，有充足的时间让灰泥粘合砖层．德拉·波尔塔决定用拱鹰架结构支撑穹顶不断增高的壳，从而降低以极快速度建设扁平穹顶的风险．

采光亭花了两年多建成．1593年年底，球和十字架被放到了最顶端．图5-39给出了一幅蚀刻版画，它展示了德拉·波尔塔的穹顶和采光亭雄踞在米开朗基罗设计的南侧半圆室的上方．穹顶东边的建筑群包括旧圣彼得大教堂的遗迹．在圣彼得广场的中央可以看到一座古埃及的方尖碑．距离穹顶完工仅仅几年前，人们付出了巨大的努力才将这座方尖碑移到了广场的中心位置．这座方尖碑的故事会在讨论5.2中讲述．



图**5-39**　从南面看圣彼得大教堂．《罗马印象》（***View of Rome***）细部，蚀刻版画，由**Antonio Tempesta**出版，**1593**

圣彼得大教堂在接下来的20年内竣工，它应该是圆形的还是巴西利卡式的问题终于得到了解决．教皇最终批准了有一个狭长中殿和宽敞入口的巴西利卡设计，而不是布拉曼特和米开朗基罗所构想的圆形设计．中殿应包含一个带镶板的筒拱顶，其形式与穹顶的支撑拱券相同．它应被分成3个隔间，由拱券和墩柱支撑，每边都向侧廊敞开．东边的老结构被推翻，1612年，新建筑大师卡罗·马德诺（1556—1629）完成了中殿和

入口区及其正面的建造.

图5-40中，科达齐的绘画记录了圣彼得大教堂在完工几年之后的情况.它用奇特的暗色调描绘了穹顶及其鼓座，画中还包含了两座后来饱受争议的钟楼，如今它们已不复存在.从绘画中可以看出，马德诺的正面反映了图5-34米开朗基罗用南侧半圆室确立的特征.这些特征包括大型科林斯式壁柱、一系列或宽或窄的隔间、爱奥尼亚式柱围出的阳台、交替出现的三角形和弧形山花以及对整体布局的垂直表达.科达齐的绘画还表明，马德诺设计的正面的阁楼几乎完全封闭，只开了很小的矩形窗，这就减缓了正面向上的流动.与它相反，米开朗基罗设计的南侧半圆室的阁楼的拱形大开口则促进了这一流动.圣彼得大教堂的外部表面和穹顶表达了米开朗基罗的构想，而巴西利卡狭长的中殿和宽广的正面则没有表达.



图**5-40**　维维亚诺·科达齐，《罗马圣彼得大教堂》（***St. Pater's Rome***），约**1630**年.帆布油画，普拉多美术馆，马德里

圣彼得大教堂的建造花了120年.那个时代最伟大的建筑师贡献出他们的聪明才智，使这座新教堂成为今天基督教信仰的辉煌的纪念碑.布拉曼特设计了新教堂的中部核心，米开朗基罗塑造了该结构的主要方面，德拉·波尔塔抬高了它的巨大穹顶，马德诺延长了它的中殿并赋以巴西利卡外形.还有济安·洛伦佐·贝尼尼用巴洛克表达巴西利卡的内部并建造了环绕圣彼得广场的柱廊.

5.6 贝尼尼的巴洛克巴西利卡

1545年，罗马天主教会在塔兰托会议上集合，为反击新教改革而进行改良．其中一个提案号召艺术和建筑促进教会的影响力，将信徒直接与其信仰的宗教经典和象征连接起来．新出现的巴洛克风格保留了古典和文艺复兴建筑的形式和结构，并用繁复的装饰细节对它们进行美化．（单词baroque可能来源于葡萄牙语barocco或西班牙语barueco，二者均指形状不规则的珍珠．）新建筑以湿壁画、粉刷的墙面、雕塑、灯光和色彩的熟练使用、不同表面的相互影响为特征，创造了戏剧般宏伟的形式与空间．

和佛罗伦萨成为文艺复兴艺术性的典范相同，罗马成为巴洛克艺术和建筑的中心．17世纪，马德诺的接替者、布拉曼特和米开朗基罗的继承者济安·洛伦佐·贝尼尼（1598—1680）主宰了这一新风格的发展．圣彼得大教堂内部的许多特征都来自贝尼尼及其工场的创作．他们不仅对中殿的地板和墩柱进行装饰，如彩图21潘尼尼的绘画所示，还添加了祭坛和坟墓四周的雕塑群及十字交叉处和主后殿的装饰元素．为了减小穹顶下方的巨大空间，贝尼尼设计了一座不朽的华盖，它将建筑和雕塑用镀金的青铜融合在一起．这座象征性的保护顶篷比主祭坛高27米左右，在1624年到1634年由许多工匠竖立起来．它的4根青铜柱呈波浪状螺旋上升，呈现出崭新、华丽的巴洛克风格．这些青铜是从万神殿中拆除、融化再重塑的．彩图21给出了在中殿远端观看华盖的情景．



彩图 **21**　乔万尼·保罗·潘尼尼，《罗马圣彼得教堂内部》（*St. Peter's Rome*），1731 年．圣路易斯艺术博物馆

1656年，贝尼尼开始从事圣彼得广场的工作．拉丁基督教世界的这座伟大新教堂的规模要求有一个雄伟的外部环境．贝尼尼创建了一条拱廊，它每4根柱子并排，从马德诺的正面伸出，以方尖碑为中心扩展成巨大的椭圆形．图5-41中乔万尼·皮拉内西的一幅版画展示了它的一对臂是如何伸出的，它象征着对信徒的威严拥抱．广场可以容纳250 000多名群众接受教皇祝福．有140座圣徒的雕像从它们坐落的柱廊顶端俯瞰着广场．皮拉内西在丛书《罗马印象》中的作品以极高的精度和专业技术制作完成．它的影响极其深远，促进了人们对这座永恒之城的理解并使其声名远播．



图**5-41**　乔万尼·皮拉内西，圣彼得大教堂及其前院和柱廊，**1775**．蚀刻版画，选自丛书《罗马印象》．感谢 **René Seindal**

为了构造出柱廊的椭圆形，贝尼尼向罗马人的方法求助．图5-42的两个等腰三角形，其顶点为1、2和3，以及1、3和4，正如图2-39和2.6节所描绘与展示的，它们确定了柱廊的同心椭圆．看一下柱廊的缺口，这个椭圆的上下两部分只占很小的空间．图5-42展示了两对以点1和点3为圆心的同心圆弧及从这两点出发的半径是如何确定大多数柱子的位置及其间距的．以点2为圆心的圆及其半径决定了离正面最远的两组柱子的位置．

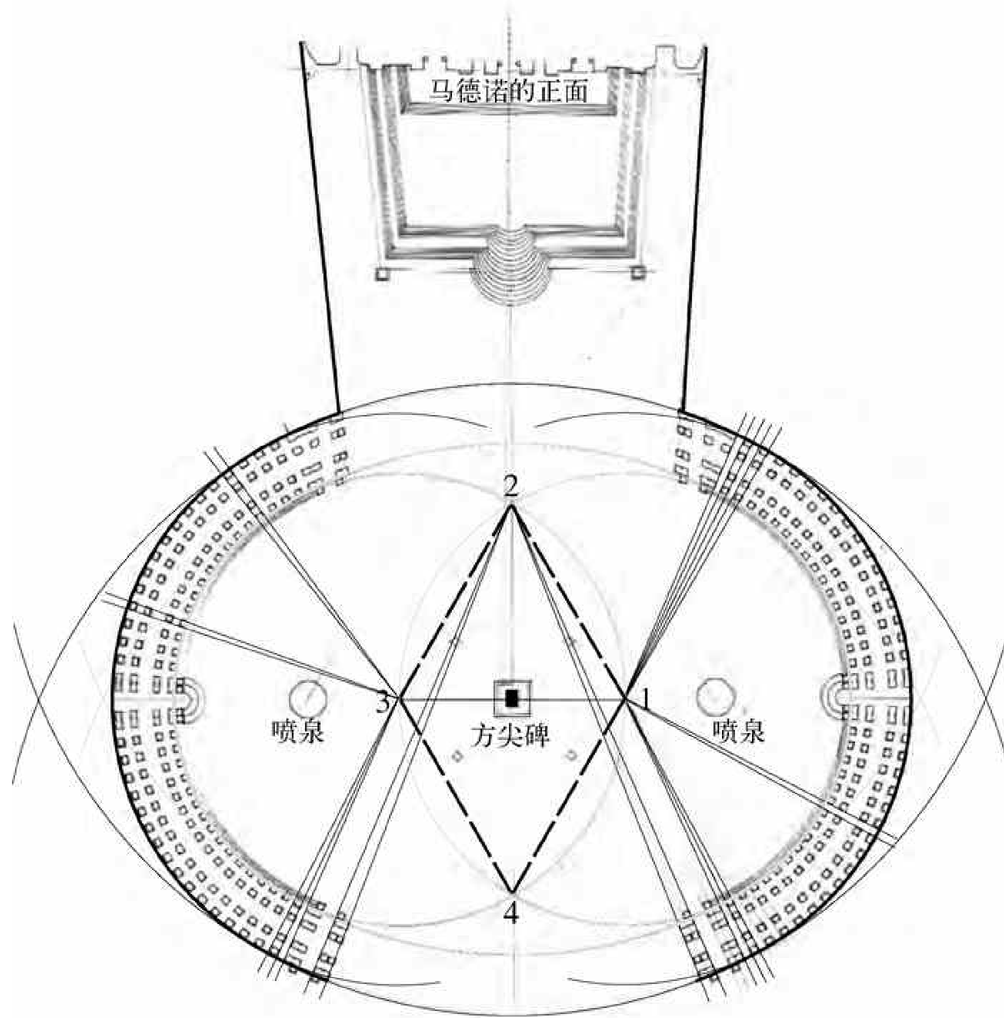


图**5-42**　贝尼尼所设计柱廊的椭圆形状

贝尼尼可不会点石成金．为了支撑高耸的钟塔，马德诺正面的两个最远处的隔间比其他的都宽．当正面在施工过程中产生很大的不平衡沉降后，这一设计就有了问题．正面之下的底层土性质不同且排水很差．马德诺打进地里的桩及它们上面的宽地基不够结实．结果圣彼得大教堂的正面——长115.8米、宽22.9米、高48.8米的建筑，稍微朝南端偏转．在这个过程中，一些墙和拱顶产生了裂缝．当贝尼尼继续对马德诺之前已经开始建造的塔楼施工时，其持续增加的重量使这一问题更加严重．在贝尼尼发表大量批评之后，塔楼项目被放弃．（图5-40告诉我们这些塔楼在一段短暂时期内尚存在的情形．）

考虑到圣彼得大教堂穹顶的巨大规模和重量（后来的研究得出拱肋和壳的重量约为1.9万吨，采光亭约为1361吨，整个穹顶超过1亿磅），存在

结构问题也就不足为奇了．这座砌筑建筑的巨大重量所产生的环向应力不能为德拉·波尔塔绕在穹顶上的3条铁链所限制．从起拱线向上沿内壳的子午线直至采光亭产生了严重的裂缝．它们比布鲁内莱斯基的佛罗伦萨穹顶的裂缝更严重．18世纪中期，该穹顶得到全面修复，包括在穹顶的不同高度处再放上5根铁链以及对原来的3根铁链中的1根进行修理．（第6章将讲述这一故事．）新增的铁链在图5-37中记为A、B、C、D和E，而c是经过修理的铁链．铁链A和B加强了米开朗基罗设计的鼓座所属的双柱外环与位于窗户之间的墩柱内环的脆弱连接．这些补救措施使该穹顶更稳固，从此再未观测到大的结构问题．图5-43展示了圣彼得大教堂穹顶的内部和内壳，图5-44展示了如今它的正面和穹顶外部．

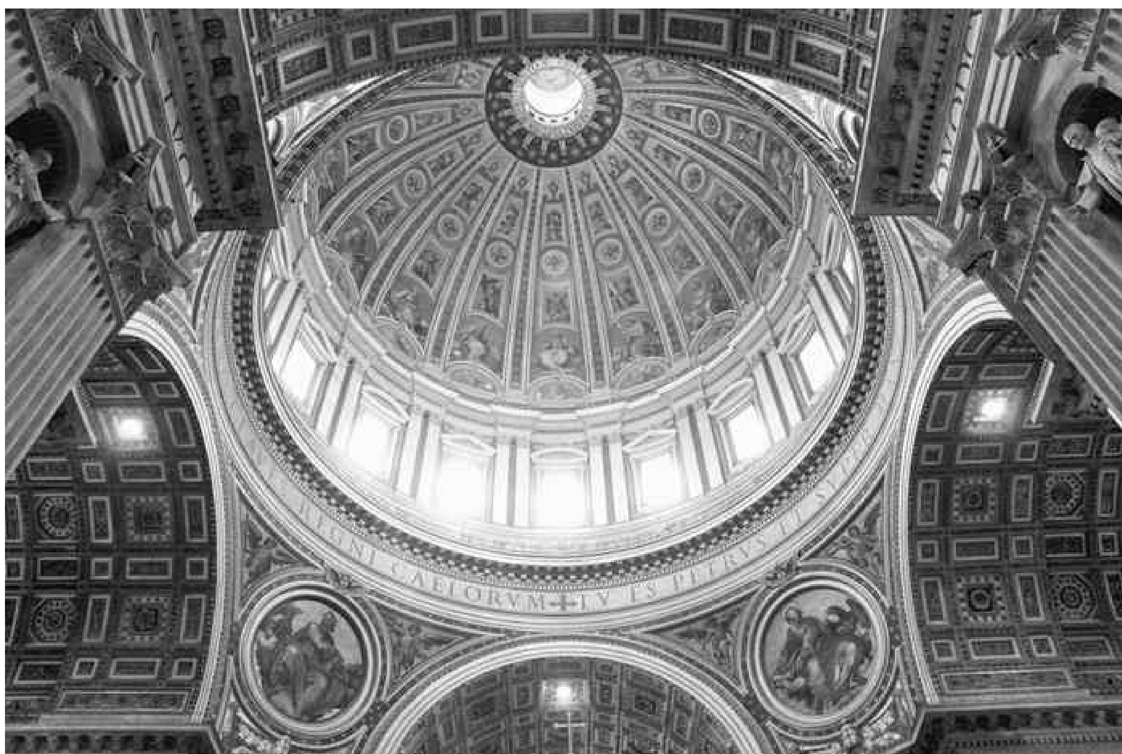


图**5-43**　如今圣彼得大教堂的穹顶内部，**Jay Berdia**摄



图**5-44**　圣彼得大教堂的穹顶和正面，**Wolfgang Stuck**摄

5.7 布鲁内莱斯基和透视法 1

1 本节和下一节均进行透视法的数学研究．它们属于专业知识，但不影响你对本书中其他任何内容的阅读和理解，可以跳过

让我们回到彩图20中拉斐尔的《雅典学派》．它的场景从前方的石地板向上到楼梯，再指向建筑物的正面和通往拱门的过道．前景的人物形象画得大一些，而背景中的则变得小一些．随着这幅画从前到后展开几个不同的平面，拉斐尔创造出了一种纵深感．观众看到这幅画，就好像看到了现场．画家或版画家是如何获得如此写实的作品的？在彩图21中，潘尼尼是怎样在作品的二维平面上表现出圣彼得大教堂中逐渐退后的中殿、侧廊、拱顶和拱券的？简而言之，画家和版画家只是绘出了他们所见到的事物．不过有没有这样的一种方式，能用精确的几何学术语阐述艺术家如何将其观察到三维空间转化到帆布或纸平面上？

人们认为不是别人，正是菲利波·布鲁内莱斯基给出了这个答案．阿尔伯蒂关于绘画的两本论著进一步发展了布鲁内莱斯基的观点．他的第一部用拉丁语写的理论文章《论绘画》（*De Pictura*），出版于1435年．一年后，又出版了《再论绘画》（*Della Pittura*）．它是一本献给布鲁内莱斯基并面向所有艺术爱好者的作品．需要指出的是，透视不仅对画家和版画家很重要，对建筑师也一样．建筑师不仅对建筑物的实际外形，也对从一些重要的观察点所看到的样子感兴趣．从不同的角度观察建筑物时，它会呈现何种外形属于透视法的范畴．

进入我们视野的物体表面上的每个点所发出的光线到达并刺激我们的眼睛，在这里，允许我们观看的系统对这些光线进行处理，这样我们才能看到该物体．为了理解透视法，我们重点关注从物体出发到达眼睛的一束光线，对它进行抽象研究．在此之前，我们首先需要学习更多平面及空间内抽象线条的知识．我们将用到4.3节和4.4节的内容．

我们考虑一下xy坐标系，令L为平面内的一条斜线．取L上的两个确定的点$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$．回忆一下，L的两点形式的方程为

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$．整理该方程，得$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，令

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=t$，则有 $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ 和 $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$．因此

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1) \text{ 且 } y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

这些方程都是L以t为参数的参数方程．（单词parameter源自希腊语，此处意为“决定因素”，即给定t，能同时确定x和y．）关于y的方程中t前面的系数 $y_2 - y_1$ 与关于x的方程中t前面的系数 $x_2 - x_1$ 的比值为L的斜率．

由t 的值及两个方程所确定的一对数x和y满足$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$．因此$t$ 所确定的点 $P = (x,y)$ 在L上．例如，对 $t = 0$，得到点 $P_1 = (x_1,y_1)$，对 $t = 1$，得到点 $P_2 = (x_2,y_2)$．当t沿实数域变化时，对应点 $P = (x,y)$ 则沿直线L变化．上面两个方程的形式告诉我们，选择不同的点 P_1 和 P_2 会产生L的不同的两个参数方程．虽然推导只针对斜线，但其实上面的参数方程也适用于垂线．此时，$x_1 = x_2$，因此有 $x = x_1$．由于 $y = y_1 + t(y_1 - y_2)$（且 $y_2 \neq y_1$），直线上的所有点(x,y)随t的变化而变化．

我们来看一个例子．考虑经过点 $P_1 = (-2,3)$ 和 $P_2 = (4,1)$ 的直线，如图5-45所示．验证L的斜截式方程为$y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$．将 P_1 和 P_2 的坐标代到一般形式的参数方程中，得到L的方程 $x = -2 + t(4-(-2))$ 和 $y = 3 + t(1 - 2)$，即

$$x = -2 + 6t \text{ 和 } y = 3 - 2t$$

考虑让参数t代表时间．因为t所确定的点$P(x,y)$的位置随时间的变化而变化，该点会发生移动．当时间 $t = 0$ 时，点P在$(-2,3)$处．随着t的增加，x增加，P向右移动．当时 $t = 1$，点P到达处$(-2 + 6,3 - 2) = (4,1)$．当时 t ＞ 1，继续增加，点P继续从$(4,1)$向右移动．要使点P位于L上点$(-2,3)$的左侧，t的取值范围是什么？如果在确定t的两个系数时，点$P_1(-2,3)$和$P_2(4,1)$的顺序相反，则得到不同的直线L的方程，为 $x = -2-6\,t$ 和 $y = 3 + 2\,t$，则此时点$P(x,y)$如何沿直线L移动？

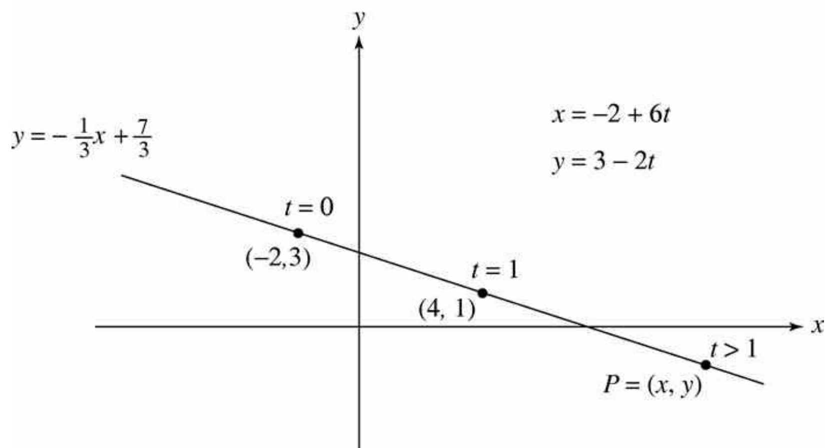


图　**5-45**

我们转而考虑xyz坐标系和空间中的直线L．设 $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ 为L上不同的两点．令 $P=(x,y,z)$ 为任意一点，要使点P在直线L上，x、y和z需满足的条件是什么？这个问题要使用图5-46．将P_1和P_2沿与z轴平行的方向平移到xy平面，得到该平面内的两点(x_1,y_1)和(x_2,y_2)．通过这个过程，L被移到由(x_1,y_1)和(x_2,y_2)所确定的直线L_{xy}上．用同样的方法，将P移到(x,y)．如果点P在L上，则(x,y)在L_{xy}上．根据之前的讨论可知 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$．现在重新将点$P_1$、$P_2$和直线$L$沿与$y$轴平行的方向平移到$xz$平面．如果$P$在$L$上，则$(x,z)$在$L_{xz}$上，且有 $\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$．可知如果 $P=(x,y,z)$ 在由 $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ 所确定的直线上，则 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$．设 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t$，则有

$$x=x_1+t(x_2-x_1)\text{、}y=y_1+t(y_2-y_1)\text{和}z=z_1+t(z_2-z_1)$$

我们已证明如果 $P=(x,y,z)$ 在L上，则对某实数t，它的坐标满足以上方程，这些方程也称为参数方程．其他方向的情况也成立．也就是说，如果对某实数t，点P的x、y和z坐标满足上述方程，则点P位于L上．（我们省略其证明．）

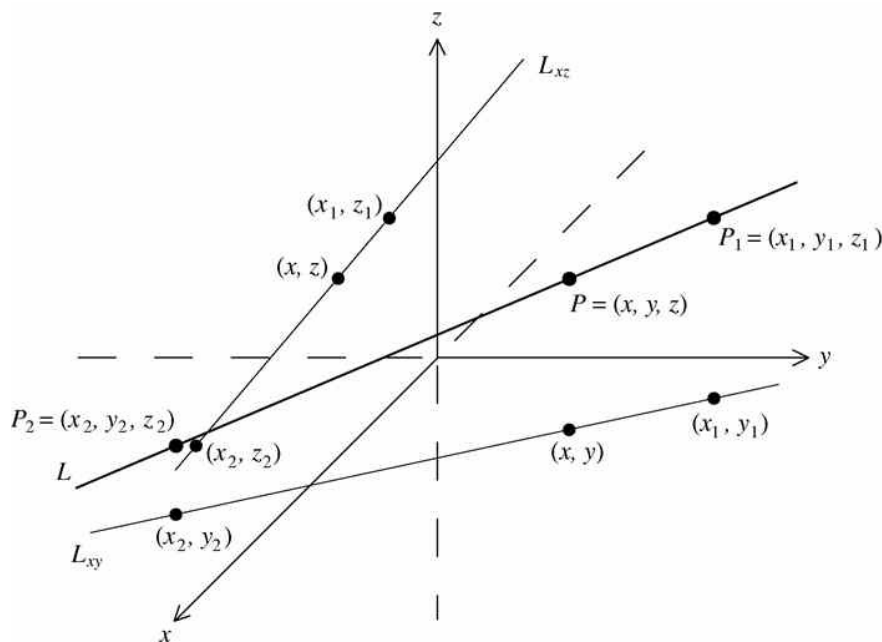


图 **5-46**

例如，取点 $P_1 = (3,-4,2)$ 和 $P_2 = (-5,6,1)$．根据上面的讨论，如果对某实数t，有

$$x = 3 - 8t、y = -4 + 10t \text{ 和 } z = 2 - t$$

则点 $P = (x,y,z)$ 就位于 P_1 和 P_2 所确定的直线上．令t等于-2和3，则知点 (3-8(-2),-4 + 10(-2),2 - (-2)) = (19,-24,4) 和 (3-8×3,-4 + 10×3,2 - 3) = (-21,26,-1) 在这条直线上．

阿尔伯蒂的作品出版200年后所发展起来的解析几何正好可以用来解释阿尔伯蒂从布鲁内莱斯基那里所学到的知识．阿尔伯蒂考虑了一个铺着正方形瓷砖的水平瓷砖地板，尤其是有6×6个正方形瓷砖的地板，他描述了画家从观察点绘制这个正方形的方法．

图5-47考虑三维空间及在其中建立的xyz坐标系．该图以地板为xy平面，在上面绘制了66排列的瓷砖．每个瓷砖是1×1的正方形，y轴经过该排列的中心，该排列的前端到x轴的距离为h．画家的矩形帆布放在xz平面．画家的眼睛固定在帆布后面y轴的正上方，高为e，到帆布的距离为d．即画家的眼睛处在点 $E = (0,-d,e)$．为方便下面的解释，假设画家工作时帆布是透明的．

图　**5-47**

以下问题的答案是关键．给定地板上的一点P（在不在瓷砖上都行），画家在他的帆布平面上看到的点Q将精确地处于哪个位置？因为P在xy平面内，则存在某 x_0 和y_0，有 $P = (x_0,y_0,z)$ ．为用坐标精确定位Q点，我们会找到连接E和P点的直线L的一组方程，然后确定L与xz帆布平面的交点．计算E和P的坐标差，得 $0 - x_0$、$-d - y_0$、$e - 0$．回忆对三维空间内直线的讨论，可知L上的点(x,y,z)满足 $x = x_0 - tx_0$、 $y = u_0 - t(d + y_0)$、$z = 0 + te$，其中t的范围是实数．对$t = 0$， $(x,y,z) = (x_0,y_0,0) = P$；对 $t = 1$，$(0,-d,e) = E$ ．L与xz平面的交点的y坐标为 $y_0 - t(d + y_0) = 0$．可得

$t=\dfrac{y_0}{d+y_0}$．将t代入L的参数方程中，可得所求的帆布上的点

$Q=\left((x_0-\dfrac{y_0x_0}{d+y_0}),0,\dfrac{ey_0}{d+y_0}\right)$．因为$x_0-\dfrac{y_0x_0}{d+y_0}=\dfrac{x_0(d+y_0)-y_0x_0}{d+y_0}=\dfrac{dx_0}{d+y_0}$，所以点 $Q = (x_1,0,z_1)$，其中$x_1=\dfrac{dx_0}{d+y_0}$且$z_1=\dfrac{ey_0}{d+y_0}$．

因此在坐标系框架给定后，可用如下规则表示阿尔伯蒂对画家的指

导：xy平面内任一位置上坐标为 $P=(x_0,y_0)$ 且y坐标为正值的点P（包括不在方形瓷砖上的点）在帆布的xz平面上应绘成点

$$Q=(x_1,z_1)\text{，其中 } x_1=\frac{dx_0}{d+y_0} \text{ 且 } z_1=\frac{ey_0}{d+y_0}$$

应用阿尔伯蒂的规则，把瓷砖地板放到帆布上，其效果如下．图5-48(a)展示了66排列的瓷砖轮廓及其角上的4点 P_1、 P_2、P_3和 P_4．图5-48(b)中的点 Q_1、 Q_2、Q_3和 Q_4 是使用阿尔伯蒂的规则后在帆布上的影像．地板上垂直（在这个问题上，“垂直”是针对图5-48(a)而言）线和对角线在帆布上的位置具有决定作用，将在下文研究．图5-48(a)考虑x轴上的点c和地板上的直线$x=c$．注意这条直线上的点都具有这样的形式，即对实数t，有 $P(c,t)$．根据阿尔伯蒂的法则，点 $P(c,t)$ 在帆布上要画在点 $Q=\left(\frac{dc}{d+t},\frac{et}{d+t}\right)$处．取$t=h$，可知在瓷砖地板前端的点$(c,h)$落在帆布上的点为$Q=\left(\frac{dc}{d+h},\frac{eh}{d+h}\right)$．考虑指定时间 $t\geq 0$ 并认为点$P=(c,t)$沿直线向上移动．随着t越来越大，地板上的点P则离画家越来越远．重新整理Q得

$$Q=\left(\frac{dc}{d+t},\frac{et}{t(1+\frac{d}{t})}\right)=\left(\frac{dc}{d+t},\frac{e}{1+\frac{d}{t}}\right)$$

，可知帆布上的点Q最终移到点 $V=(0,e)$．已经证明地板的xy平面上的直线$x=c$在帆布的xz平面内应画成连接$\left(\frac{dc}{d+h},\frac{eh}{d+h}\right)$和 $V=(0,e)$ 的直线，如图5-48(b)所示．可以推出在帆布上绘画时，地板上所有的垂直直线，包括经过瓷砖前端边界点处的7条垂线都会交于点 $V=(0,e)$．称帆布上的点 $V=(0,e)$ 为消失点．上文得出的结论与我们的经验符合．考虑两根笔直且在水平方向上平行的铁轨．试想你正站在它们中间，沿铁轨的方向往前看，这两根铁轨看起来会在地平线上相交．

该问题的最后一部分考虑地板所在的xy平面上斜率等于1的直线，特别是过P_1和P_2的对角线在帆布上的位置．设这一直线从x轴上的一点c出发．因为$(c,0)$在该直线上，该直线的方程（点斜式）为 $y=x-c$，如图5-48(a)所示．注意这条直线上的任一点都具有形式 $P=(t+c,t)$，其中t为

实数．（这等于说直线的参数方程为 $x = t + c$ 和 $y = t$．）根据阿尔伯蒂的法则，它在帆布上的对应点为 $Q=\left(\frac{d(t+c)}{d+t},\frac{et}{d+t}\right)$．再考虑将 $t \geq 0$ 作为时间，$P = (t + c,t)$ 将沿直线向上移动．随着t越来越大，地板上的点P会越来越远．因为 $Q=\left(\frac{dt(1+\frac{c}{t})}{t(1+\frac{d}{t})},\frac{et}{t(1+\frac{d}{t})}\right)=\left(\frac{d(1+\frac{c}{t})}{1+\frac{d}{t}},\frac{e}{1+\frac{d}{t}}\right)$，帆布上的对应点$Q$移到点 $D = (d,e)$（因为 $\frac{c}{t}$ 和 $\frac{d}{t}$ 均趋于0）．可知在帆布所在的xz平面上绘制时，地板所在的xy平面上的任一斜率为1的直线，尤其是过 P_1 和 P_3 的直线都会趋于D点．

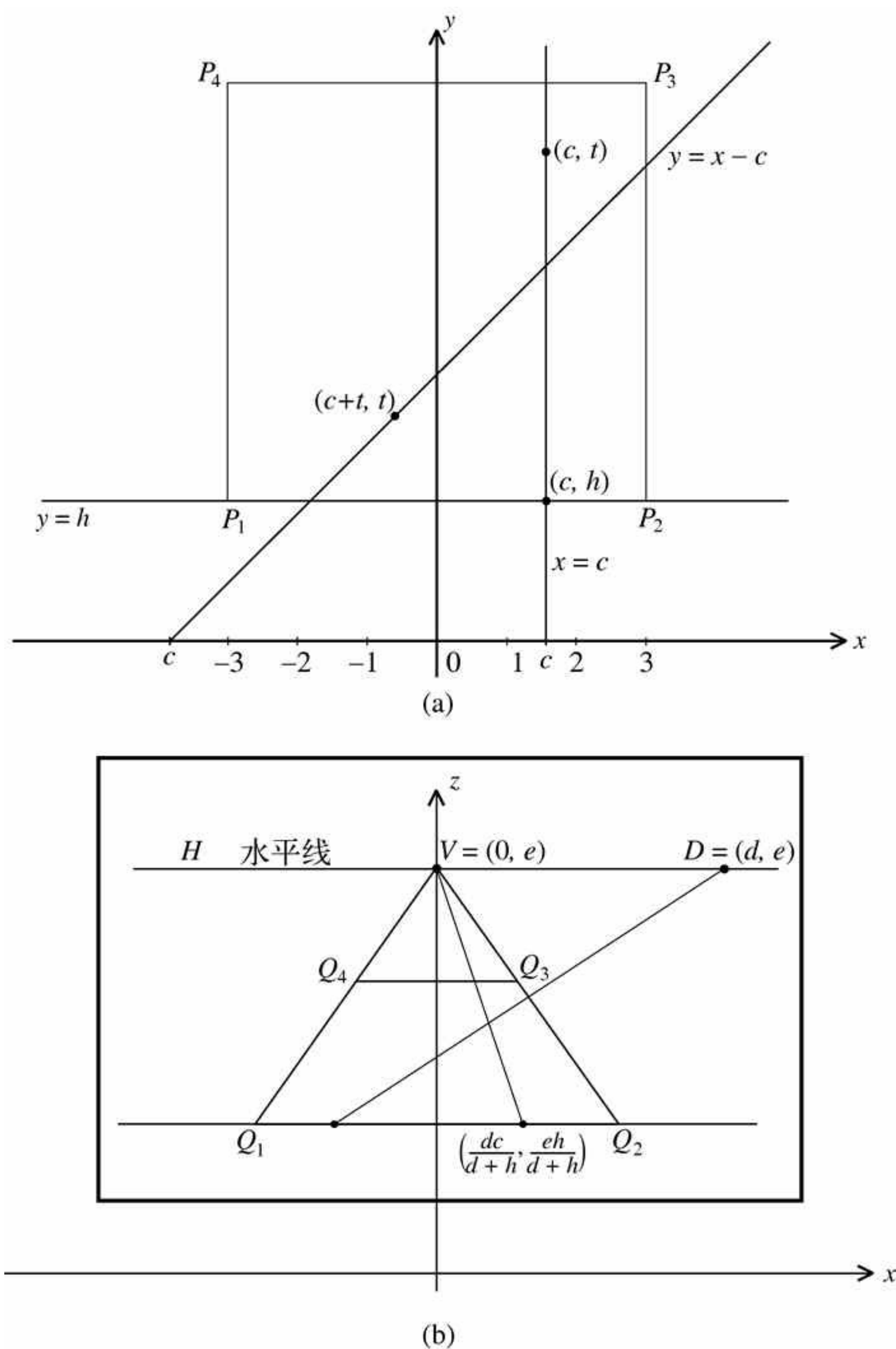
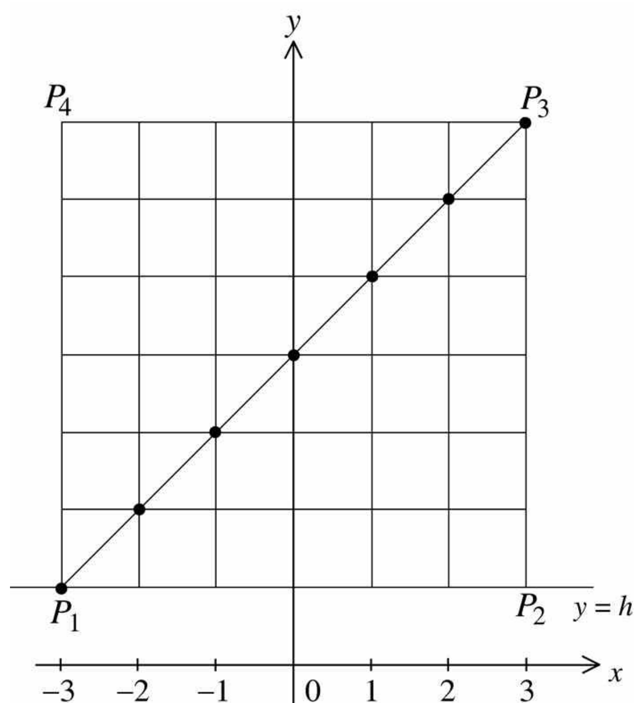


图　**5-48**

现在画家可以按如下方式绘制阿尔伯蒂的66的瓷砖地板了．先画点 $V = (0,e)$ 和 $D = (d,e)$ 及它们所确定的水平线H．该水平线对应于画家能看到的地平线（如果没有阻碍的话）．画家考虑图5-48(a)中的垂直线$x=c$，取$c=-3$和$c=3$．按图5-48(b)规定的方法表示这两条直线，得到帆布上从

Q_1到V和Q_2到V的两条直线，如图5-49(b)所示．这两条直线的起点Q_1和Q_2之间的线段是地板影像的下边界．画家在Q_1和Q_2间等间距地放进5个点，画出从它们到V点的线段．这些直线是6×6排列的瓷砖之间的垂直分界线在帆布上的影像．接下来，画家考虑地板上点P_1和P_2所确定的对角线．当在帆布上作画时，它们就是从Q_1到Q_3直到 $D=(d,e)$ 的直线．图5-49(a)着重表现了对角线与7条垂直线的7个交点．在帆布上，它们是7根过V点的直线与过Q_1和D点的对角线之间的交点．注意这7个点告诉画家在哪个位置绘制瓷砖间的水平分界线．这就完成了阿尔伯蒂的瓷砖地板的素描，如图5-49(b)所示．



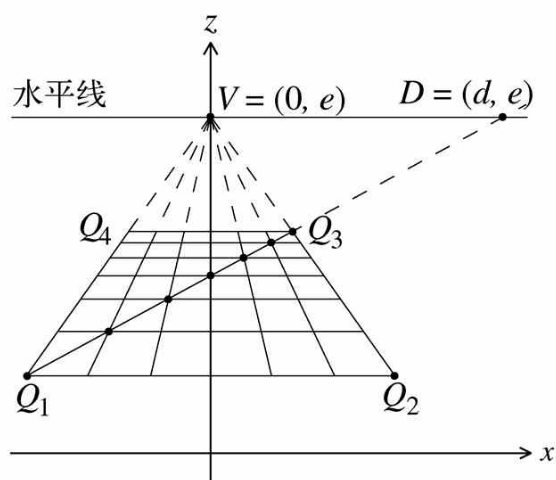


图　**5-49**

地板是一个好的开始，不过怎么绘制有高度的物体？如何处理曲线？5.8节以及讨论5.3会告诉我们，只要将上文讲解的透视法扩展后就可以回答这类问题.

雕塑家洛伦佐·吉贝尔蒂（1378—1455）和多纳泰罗（1386—1466）以及画家马萨乔（1401—1428）是首先刻意运用阿尔伯蒂在《论绘画》一

书中用数学解释的规则的艺术家．吉贝尔蒂和多纳泰罗在他们的精美艺术青铜浮雕镶板中使用了线性透视法，图5-50展示了其中的一幅．第一幅使用布鲁内莱斯基的透视原理的绘画作品是马萨乔绘制的湿壁画《三位一体》（*Trinity*），如图5-51所示．它绘于圣母百花大教堂内，后来阿尔伯蒂为该教堂建造了新立面，如图5-5所示．不足为奇，马萨乔在处理这幅作品时，似乎不如80年后拉斐尔绘制《雅典学派》时自信．

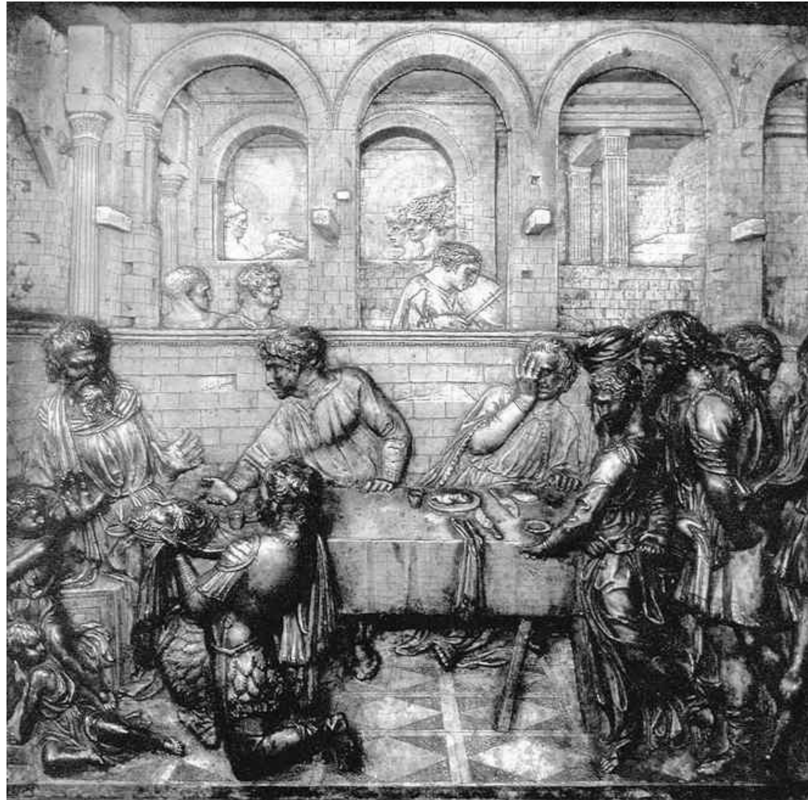


图**5-50**　多纳泰罗，《希律王的盛宴》（***Feast of Herod***），约**1425**年．锡耶纳大教堂中洗礼池的青铜浮雕

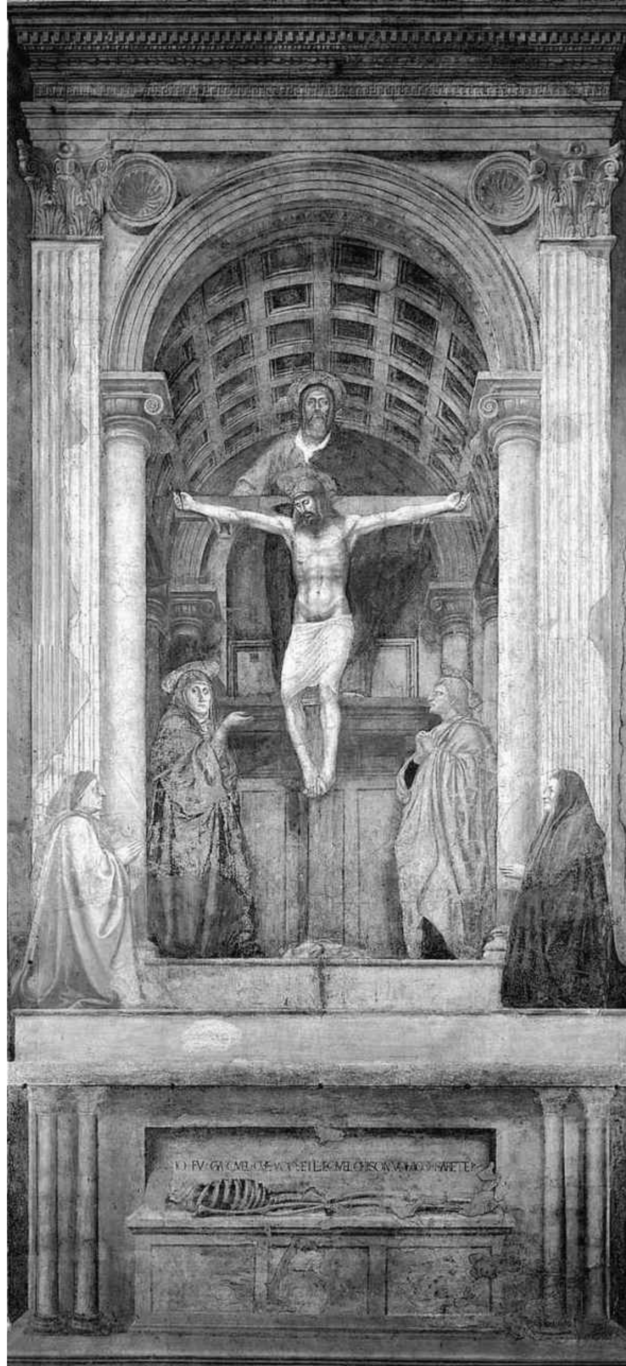


图**5-51**　马萨乔，《三位一体》（***The Trinity***），**1427~1428**．新圣母玛利亚教堂中的湿壁画

本节对透视法的讨论基于图5-47，需要假设用一只眼睛观看物体（在本文中是瓷砖地板）．事实上，我们是用两只眼看东西，这意味着我们实际上看到的是两幅有轻微差别的影像的合成，它们的角度稍微不同，最后合成为单个影像．这给我们看到的物体赋予了纵深感．

5.8 从圆到椭圆 1

1 本节以5.7节为基础，但不影响本书其余部分的阅读与理解．

看一下图3-24中对沙特尔大教堂的玫瑰花窗的描绘．我们知道它是圆形的，但却用椭圆来表示．彩图21中潘尼尼关于圣彼得大教堂内部的绘画作品把中殿沿线的圆形拱券用弧来表示，这些弧也不是圆形．这些画作都提出了这样一个问题，即：当以某种角度看一个圆时，它的准确形状是什么，是否是一个椭圆，或者其他的卵形？

在回答这些问题前，我们将先考虑4.1节所介绍的阿波罗尼斯关于圆锥截面的知识，然后将它们在坐标平面框架内重新进行整理．假设给定一个建有*xy*坐标系的平面．

考虑该平面内的任一抛物线，令*c*为它的焦点与准线间的距离．令 $d=\frac{1}{2}c$，则有 $c = 2d$．现用这样的一种方式移动抛物线，使其焦轴位于*y*轴上，使抛物线与其焦轴的交点位于原点*O*上．图5-52展示了处于这一位置的抛物线．因为*O*在抛物线上，从*O*到焦点的距离和从*O*到准线的距离相等，都等于*d*．考虑抛物线与过焦点平行于*x*轴的直线的交点．因为该交点在抛物线上，它与焦点之间的距离等于2 *d*，因此这个交点为(2 *d*,*d*)．现取抛物线上的任一点(*x*,*y*)，直接应用阿波罗尼斯的命题P2，可得 $\frac{y}{d}=\frac{|x|^2}{4d^2}$．重新整理后，得到抛物线的标准方程

$$y=\frac{1}{4d}x^2$$

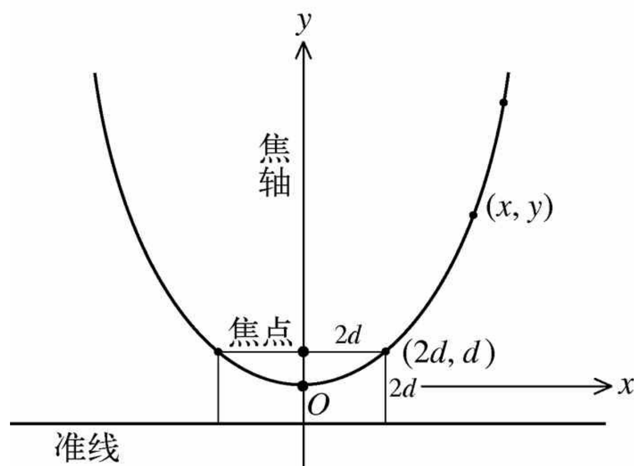


图 **5-52**

接下来考虑平面内的任一椭圆．椭圆由两个焦点及正常数k确定．令$a=\frac{1}{2}k$，则有 $k = 2a$．令c为椭圆中心与焦点之间的距离，则两个焦点间的距离为$2c$．那么根据要求 $k>2c$，有 $a>c$．按如下的方法移动椭圆，使其焦轴为x轴，中心点位于原点O．图5-53展示了此时的椭圆．点E和D为椭圆与x轴正半轴和y轴正半轴的交点．因为D在椭圆上，则从D到焦点的距离的2倍等于k，这样D到焦点间的距离等于a．设d为E与右侧焦点的距离，因为E在椭圆上，距离d与$d+2c$的和等于k．即 $2c + 2d = k = 2a$，从而有 $c + d = a$．因为E即为点$(a,0)$且a为该椭圆的半长轴，设b为半短轴，这些就是图中所展示的信息．设(x,y)为椭圆上的任一点，将阿波罗尼斯的命题E2用于 $A = O$ 和 $A = (x,0)$两种情况，可得$\frac{a^2}{b^2}$ 和$\frac{|-a-x||a-x|}{|y|^2}$相等．因为$|-a-x||a-x|=|a+x||a-x|=a^2-x^2$，这就告诉我们$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{y^2}$．因此$\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$，我们可得椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

因为椭圆的外接方框确定了常数a和b，进而就确定了该椭圆．因此给定的一个方框中只有一个椭圆．

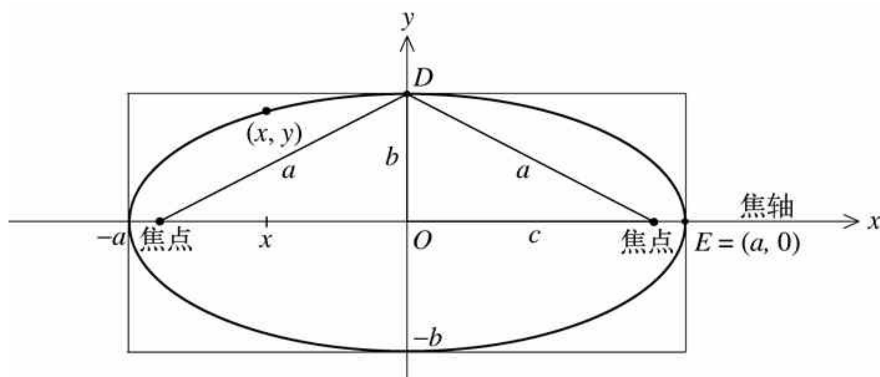


图　**5-53**

阿波罗尼斯还熟悉双曲线．我们将总结一下基本的事实．双曲线的形状由一个方框及其对角线的延长线来确定．图5-54展示了一条典型的双曲线，确定其形状的方框以及该方框所确定的常数a和b．双曲线有两个焦点，它们由方框和以方框中心为圆心的圆所确定，如图所示．过两个焦点的直线是双曲线的焦轴．在图5-54中，双曲线已被移动，使其焦轴位于x轴上，方框中心在原点O上．对角线的斜率分别为$\frac{b}{a}$和$-\frac{b}{a}$．它们的方程已在图中显示．双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

让我们考虑3个方程

$$y = 2x^2、\ x^2 + 3y^2 = 12 \text{ 和 } 2x^2 - 5y^2 = 10$$

根据上面的讨论可以得到以下的内容．令$\frac{1}{4d}=2$，注意$d=\frac{1}{8}$．则$y = 2x^2$的图形为图5-52中的抛物线，其中$d=\frac{1}{8}$．$x^2 + 3y^2 = 12$的图形与$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$的图形相同．这一方程可以重写成$\frac{x^2}{(\sqrt{12})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$，则知该图形为图5-53中的椭圆，其中$a=\sqrt{12}$，$b$=2．$2x^2 - 5y^2 = 10$与$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$的图

形相同．它可以重写成$\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$，因此该图形为图5-54中的双曲线，其中$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{2}$．

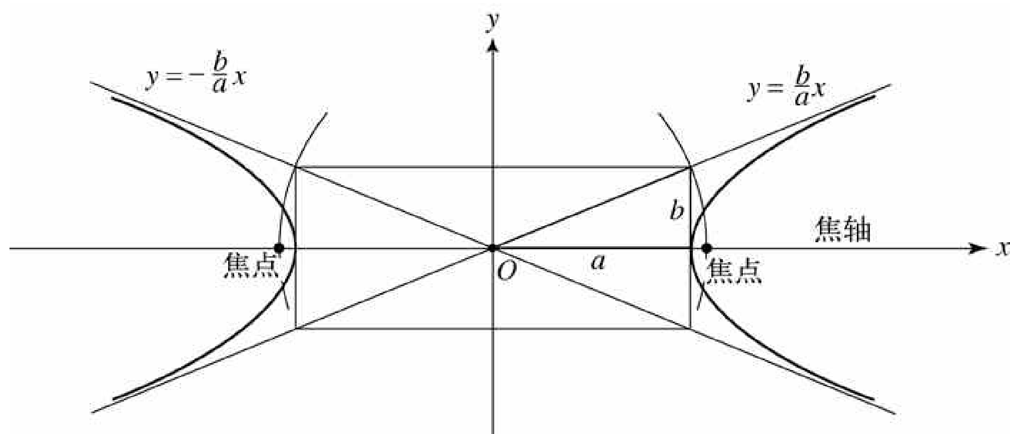


图　**5-54**

考虑半径为2、圆心为原点(0,0)的圆 $x^2+y^2=4$．将x用x-6代替，y用y-3代替，则有方程 $(x-6)^2+(y-3)^2=4$．该圆半径也为2，（根据4.3节结尾的事实）但其圆心则移到点(6,3)．用同样的方法，如果我们将x和y分别用x+7和y+1代替，则该圆的圆心(0,0)从移到(-7,-1)．图5-55展示了这3个圆．

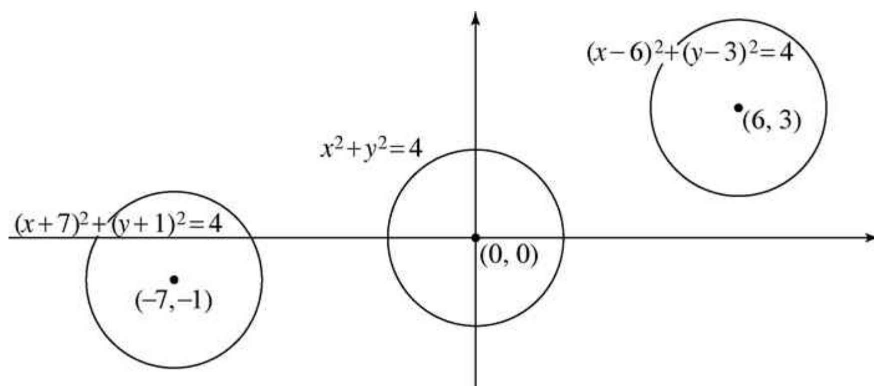


图　**5-55**

同样的方法可应用于任一图形．例如在坐标平面内，$y-2=2(x+3)^2$ 的图形与 $y=2x^2$ 的图形形状和方向都相同．$y-2=2(x+3)^2$ 的图形是通过平移 $y=2x^2$ 的图形得到的，方法是使抛物线的底（原来在原点(0,0)

处）向上移到(-3,2)处．这里所谓的平移是指在平面内将一个图形移动到新位置且不对它进行转动．用同样的方法，$(x - 5)^2 + 3(y + 7)^2 = 12$ 的图形是通过平移椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$，使其中心（原来在原点(0,0)处）位于(5,-7)点处而得到的．最后 $2(x + 9)^2 - 5(y + 11)^2 = 10$ 的图形可以通过平移双曲线 $2x^2 - 5y^2 = 10$，使其两条对角线的交点（原来在原点(0,0)处）移到点(-9,-11)处得到．

考虑方程

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (*)$$

其中A、B、C、D、E和F为常数．注意本节提到的圆、抛物线、椭圆和双曲线均可以写成这种形式．如果方程(*)的图形上没有点，或只包含一个单点，或是一条直线或者两条直线的合成，则称该方程是退化的．方程是 $x^2 + y^2 + 1 = 0$ 退化的，因为它没有解．方程 $x^2 + y^2 = 0$ 是退化的，因为它只有一个解，为 $x = 0, y = 0$．方程 $x^2 - y^2 = 0$ 可以分解为 $(x - y)(x + y) = 0$，因此 $x^2 - y^2 = 0$ 的图形是两条直线 $y = x$ 及 $y = -x$ 的和，则 $x^2 - y^2 = 0$ 是退化的．方程

$$2x^2 - 7xy + 6y^2 + 7x - 11y + 3 = 0$$

也是退化的．验证 $2x^2 - 7xy + 6y^2 + 7x - 11y + 3 = (x - 2y + 3)(2x - 3y + 1)$．因为 $(x - 2y + 3)(2x - 3y + 1) = 0$ 意味着 $x - 2y + 3 = 0$ 或 $2x - 3y + 1 = 0$，可知该方程的图形是两条直线 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 或 $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ 合成的．

我们将总结一些圆锥曲线及其方程的基本事实．作为解析几何的两个法国创始人之一，笛卡儿大体了解它们，但直到其后的17世纪，才有人将其用明确的术语表示出来．如今在任何微积分指导书中，它们都是标准内容．

基本事实1　xy平面内的任何圆锥曲线都是方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的图形，且（根据定义）该方程并不退化．

考虑二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$，其中a、b和c都是常数且 $a \neq 0$，回忆二次方程的 解为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

可看到 $b^2 - 4ac$ 控制着方程的解．如果 $b^2 - 4ac = 0$，则只有一个解，即 $x=-\frac{b}{2a}$．如果 $b^2 - 4ac > 0$，则有两个解．如果 $b^2 - 4ac < 0$，则无解．

注意如果b =0，则只有一个简单形式的解，即 $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$，其中 $\frac{-c}{a}\geqslant 0$．

类似的判据给出了具有(*)形式的非退化方程的相关知识．

基本事实**2**　如果 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 没有退化，则其图形为圆锥曲线．如果 $B^2 - 4AC =0$，则该图形为抛物线．如果 $B^2 - 4AC > 0$，则为椭圆．如果 $B^2 - 4AC < 0$，则为双曲线．

对基本事实1和基本事实2的证明都超出了本书的范围，我们将只简单评论一下．注意图5-52、图5-53和图5-54所绘制的圆锥曲线，其方程都能重新整理以满足基本事实1．容易验证这些重新整理的方程与基本事实2相符．事实上，xy平面内的任何圆锥曲线都能通过移动（平移和旋转相结合）与图5-52、图5-53和图5-54中的一种圆锥曲线相符，通常用此来做证明．

基本事实**3**　假设 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 并不退化，则如果方程的图形是焦轴平行于x轴或y轴的一条圆锥曲线，有B=0．

验证基本事实3时，重要的是完成讨论1.1解释过的配方法．例如，我们看一下方程 $3x^2 + 5y^2 + 42x + 10y + 137 = 0$．注意 $B^2 - 4AC = 0 - 15 = -15$．如果该方程没有退化，根据基本事实2，它的图形是一个椭圆．因为B=0，还可以得到更多的信息．两次使用配方法（一次针对一个变量），可得

$$\begin{aligned}3x^2+42x+5y^2+10y+137&=3(x^2+14x)+5y^2+2y+137\\&=3(x^2+14x+7^2-7^2)+5(y^2+2y+1-1)+137\\&=3(x^2+14x+7^2)+5(y^2+2y+1)-3\times7^2-5\times1+137\\&=3(x+7)^2+5(y+1)^2-15\end{aligned}$$

因此 $3x^2 + 5y^2 + 42x +10y + 137 = 0$ 与 $3(x + 7)^2 + 5(y + 1)^2 - 15 = 0$ 的图形相同． $3(x + 7)^2 + 5(y + 1)^2 = 15$ 的两边均除以15，可得 $\frac{(x+7)^2}{5}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$，因此 $\frac{(x+7)^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{(y+1)^2}{(\sqrt{3})^2}=1$．可得 $3x^2 + 5y^2 + 42x +10y + 137 = 0$ 的图形是将图5-53中的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（其中 $a=\sqrt{5}$ 且 $b=\sqrt{3}$）平移从而使其位于原点(0,0)的中心移到点(-7,-1)后得到的．它的焦轴与x轴平行．

现在让我们回到阿尔伯蒂的瓷砖地板，并将一个圆放在它的中心，如图5-56所示．该圆透视到图5-49(b)的帆布上时，如何才能准确绘制？由于该圆的圆心为$(0,h + 3)$，半径为3，它上面的任一点 $P = (x_0,y_0)$ 均满足 $x_0^2 + (y_0 - (h + 3))^2 = 3^2$．根据阿尔伯蒂的规则，帆布所在的$xz$平面上的对应点 $Q = (x_1,y_1)$ 应是什么？下面我们可以尝试这样继续．如果我们能用x_1和z_1表达x_0和y_0，然后将这些表达式代到圆的方程，这就得到了x_1和z_1之间的关系．

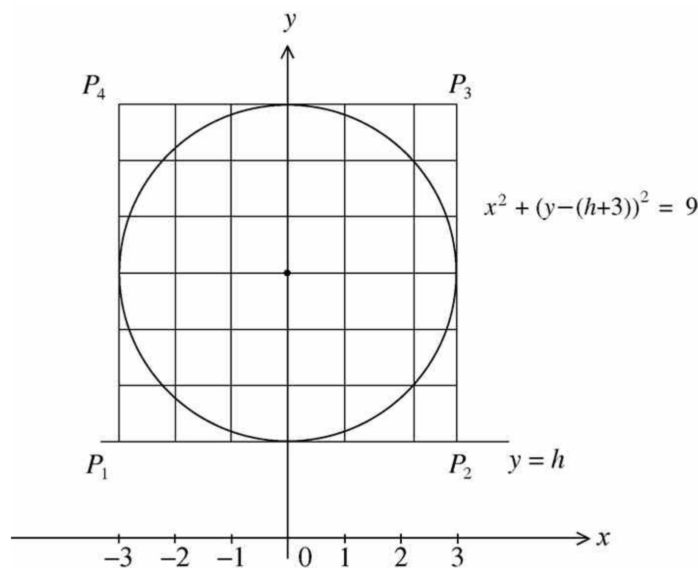


图　**5-56**

我们正在寻找的表达式是与图5-47相关的问题的答案．考虑帆布上的一点 $Q = (x_1,0,z_1)$，它正好描绘了地板上的哪个点 $P = (x_0,y_0,0)$？为了回答该问题，我们先找到 $E = (0,-d,e)$ 和 $Q = (x_1,0,z_1)$ 所确定直线，再看一下

它与地板所在的xy平面的交点是什么．E和Q的坐标之差为 0- x_1 = -x_1、 -d - 0 = -d 和 e - z_1，因此上一节提出的事实，如果对某个t，有 $x = x_1 - tx_1$、 $y = 0 - td$ 和 $z = z_1 + t(e - z_1)$，则点(x,y,z)在这条直线上．为得到直线与xy平面的交点，令 $z = z_1 + t(e - z_1) = 0$，可得 $t=\frac{-z_1}{e-z_1}$．因此有 $x_0=x_1-x_1\frac{-z_1}{e-z_1}$ 和 $y_0=\frac{dz_1}{e-z_1}$．化简后得 $x_0=\frac{x_1(e-z_1)-x_1z_1}{e-z_1}=\frac{x_1e}{e-z_1}=\frac{ex_1}{e-z_1}$．

将解 $x_0=\frac{ex_1}{e-z_1}$ 和 $y_0=\frac{dz_1}{e-z_1}$ 代入方程 $x_0^2 + (y_0 - (h + 3))^2 = 3^2$，按下面烦琐的代数步骤运算

$$\left(\frac{ex_1}{e-z_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{e-z_1}-(h+3)\right)^2=3^2$$

$$\frac{(ex_1)^2}{(e-z_1)^2}+\frac{(dz_1-(h+3)(e-z_1))^2}{(e-z_1)^2}=3^2$$

$$e^2x_1^2 + d^2z_1^2 - 2\ dz_1(h + 3)^2(e - z_1)^2 + (h + 3)(e - z_1) = 3^2(e - z_1)^2$$

$$e^2x_1^2 + d^2z_1^2 - 2\ d(h + 3)(ez_1 - z_1^2) + (h + 3)^2(e - z_1)^2 - 3^2(e - z_1)^2 = 0$$

$$e^2x_1^2 + d^2z_1^2 - 2\ ed(h + 3)z_1 + 2\ d(h + 3)z_1^2 + (h^2 + 6\ h)(e - z_1)^2 = 0$$

$$e^2x_1^2 + d^2z_1^2 - 2\ ed(h + 3)z_1 + 2\ d(h + 3)z_1^2 + (h^2 + 6h)e^2 - 2(h^2 + 6\ h)ez_1 + (h^2 + 6\ h)z_1^2 = 0$$

$$e^2x_1^2 +[d^2 + 2\ d(h + 3) + h^2 + 6\ h]z_1^2 - 2[ed(h + 3) + e(h^2 + 6\ h)]z_1 + (h^2 + 6\ h)e^2 = 0$$

$$e^2x_1^2 +[h^2 + 2\ hd + d^2 + 6(h + d)]z_1^2 - 2\ e[d(h + 3) + (h^2 + 6\ h)]z_1 + (h^2 + 6\ h)e^2 = 0$$

$$e^2x_1{}^2 + [(h + d)^2 + 6(h + d)]z_1{}^2 - 2e[d(h + 3) + (h^2 + 6h)]z_1 + (h^2 + 6h)e^2 = 0$$

现已验证如果 $P = (x_0, y_0)$ 是圆 $x^2 + (y - (h + 3))^2 = 3^2$ 上一点，则帆布上的对应点 $Q = (x_1, z_1)$ 满足方程

$$e^2x^2 + ((h + d)^2 + 6(h + d))z^2 - 2e(d(h + 3) + (h^2 + 6h))z + (h^2 + 6h)e^2 = 0$$

因为地板上的圆不是点、线或两条直线的组合，则该方程没有退化．由于 $-4e^2(h + d)^2 + 6(h + d))<0$，根据基本事实2可知它是椭圆方程．因此阿尔伯蒂地板上的圆的透视影像是椭圆．图5-57在图5-49(b)的梯形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 内绘出了这个椭圆．

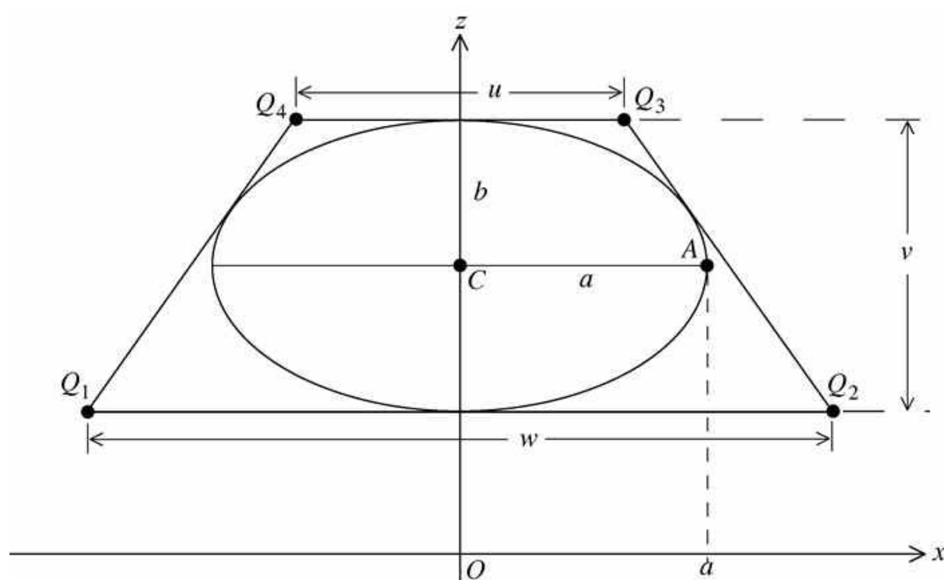


图　**5-57**

现在我们将研究图5-57中的椭圆及外接它的梯形．对点 $P_1 = (-3, h)$ 和 $P_2 = (3, h)$ 应用阿尔伯蒂的法则，可得 $Q_1 = \left(\frac{-3d}{d+h}, \frac{he}{d+h}\right)$ 和 $Q_2 = \left(\frac{3d}{d+h}, \frac{he}{d+h}\right)$．因此梯形的下底为 $w = \frac{6d}{d+h}$．再用两次阿尔伯蒂的法则，可得 $Q_3 = \left(\frac{3d}{d+h+6}, \frac{(h+6)e}{d+h+6}\right)$ 和 $Q_4 = \left(\frac{-3d}{d+h+6}, \frac{(h+6)e}{d+h+6}\right)$．可知梯形顶的长度

为$u=\frac{6d}{d+h+6}$，它的高为

$$v=\frac{e(h+6)}{d+h+6}-\frac{eh}{d+h}=\frac{e(h+6)(d+h)-eh(d+h+6)}{(d+h+6)(d+h)}$$
$$=\frac{e[h(d+h)+6(d+h)-h(d+h)-6h]}{(d+h+6)(d+h)}=\frac{6ed}{(d+h)(d+h+6)}$$

让我们回到椭圆．根据图5-57，可知它的半短轴为$b=\frac{1}{2}v=\frac{3ed}{(d+h)(d+h+6)}$．$Q_1$的$z$坐标$\frac{he}{d+h}$加上$\frac{1}{2}v$得到椭圆中心$C$的$z$坐标．通分后，得$C=\left(0,\frac{e[h(d+h+6)+3d]}{(d+h)(d+h+6)}\right)$．比较图5-49(a)和5-49(b)，可以看出$C$不是圆心的透视影像．最后看一下图5-57，我们知道椭圆的半长轴a是点A的x坐标．因此a可以通过把A的z坐标（等于C的z坐标）代入到椭圆方程中并求解x得到．这并不容易计算，我们将省略．

示例　参见图5-47，取e=6，d=2及h=12，单位均为英尺．要在帆布上分别绘出6英尺×6英尺的瓷砖地板和半径3英尺的圆，其对应的梯形和椭圆各有多大？梯形的底为$w=\frac{6\times 2}{2+12}=\frac{6}{7}$英尺，约为10.3英寸长．梯形的顶为$u=\frac{6\times 2}{2+12+6}=\frac{3}{5}$英尺，为7.2英寸长．梯形的高为$v=\frac{6\times 6\times 2}{(2+12)(2+12+6)}=\frac{9}{35}$英尺，约为3.1英寸．椭圆的半短轴$b=\frac{1}{2}v=\frac{9}{70}$英尺，约为1.5英寸．之前推出的椭圆方程可化简为

$$9x^2 + (7\times 10)z^2 - 2\times 3(15 + 6\times 18)z + 9\times 12\times 18 = 0$$

为找到半长轴a，先从点A的z坐标等于中心C的z坐标，即$z=\frac{6(12\times 20+3\times 2)}{14\times 20}=\frac{3(120+3)}{7\times 10}=\frac{9\times 41}{7\times 10}$着手．令方程中的$z=\frac{9\times 41}{7\times 10}$，求解

x．经过复杂的数学求解，可得 $x=\pm\frac{3}{\sqrt{70}}$．因此有 $a=\frac{3}{\sqrt{70}}\approx 0.36$ 英尺，约为4.3英寸．因为a和b确定椭圆的焦点（图5-53展示了如何确定）且k=2 a，现在可以精确地绘出该椭圆．

我们对透视法的数学分析聚焦在水平地板上，而垂直的墙壁及天花板都可以用同样的方法进行研究．现在我们理解了为何图3-24中的沙特尔大教堂的圆形窗子要用椭圆绘制以及为什么彩图21中潘尼尼的画作要将圣彼得大教堂中殿一侧的圆形拱券画成椭圆形弧了．

我们关于文艺复兴建筑的讲述即将结束．它已成为一个与布鲁内莱斯基、阿尔伯蒂、布拉曼特、帕拉迪奥、米开朗基罗、德拉·波尔塔、贝尼尼及其他人所创建的辉煌建筑有关的传奇．这些建筑建立在古典希腊和罗马的建筑形式基础上，但它们反映了那个年代的自信、理性和艺术精神．与文艺复兴的艺术家使用透视原理使他们的绘画和浅浮雕日臻完善相同，文艺复兴的建筑师在他们的建筑设计中注入了源自几何学和音乐比率的比例、平衡和超越一切的秩序．

5.9　问题和讨论

第一组问题讨论与本文内容有关的数学问题.

塞巴斯蒂亚诺·塞利奥（1475—1554）是意大利文艺复兴时期重要的建筑理论家． 他在1537年到1551年期间出版了《建筑五书》（*Five Books of Architecture*）中的几章，讲解了一些几何学和透视法知识，阐述了古代罗马建筑及布拉曼特和拉斐尔的文艺复兴作品，确立了5种建筑柱式（见讨论5.1），给出了圆形的教堂设计，提出多种他自己的设计方案，对施工实践和材料作出了讨论．塞利奥的著作对他那个时代建筑师的影响比他的建筑要深得多．塞利奥重点强调了帕拉迪奥在维琴察巴西利卡的隔间中所使用的那种拱券和柱子的组合（见图5-14），如今它被称为是塞利纳斯．图5-58(a)是塞利奥设计的建筑物入口.

问题**1**　将塞利奥的图放进图5-58(b)中的坐标平面内．确定点F和G的坐标．用这些信息找出该结构的高度与门的高度的比例，以及门的高度与它的宽度的比例．这些比例与阿尔伯蒂将建筑比例与音乐和弦联系在一起的法则一致吗？

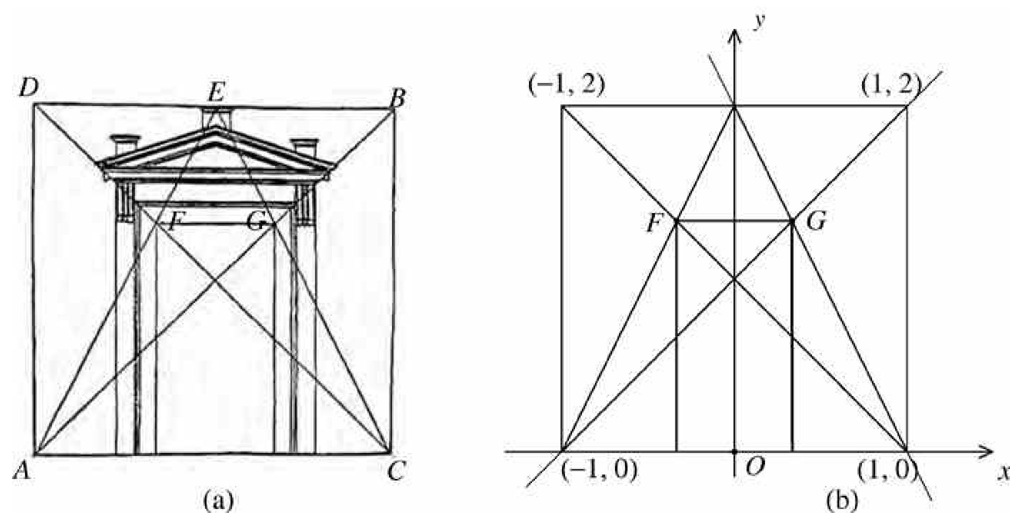


图　**5-58**

毕达哥拉斯学派使用两个正数a和b的3种不同的平均数：算术平均数$\frac{a+b}{2}$、几何平均数$\sqrt{ab}$及调和平均数$\frac{2ab}{a+b}$．对a=1和b=2，这三种平均

数分别为$\frac{3}{2}$、$\sqrt{2}$和$\frac{4}{3}$．第一和最后一个平均数是5.2节中的两个和谐音乐比率．

问题**2**　设a和b为正数．

i.设c为a和b的调和平均值．验证$\frac{a-c}{a}=\frac{c-b}{b}$．

ii.设c和d分别为a和b的算术及调和平均数．证明a和b的几何平均数等于c和d的几何平均数．

在帕拉迪奥设计的建筑物中，房间的高度h由其宽w和长l确定．对有平屋顶的房间（平屋顶几乎完全限于顶层），帕拉迪奥选择$h=w$．对底层带拱顶的房间，他的法则是h应等于w和l的毕达哥拉斯学派的3种平均数中的一个，对正方形房间，则等于$\frac{4}{3}w=\frac{4}{3}l$．帕拉迪奥的作品《建筑四书》给出了这一规则的许多证据（尤其对有拱顶的房间，因为该作品只给出了底层的设计）．可以理解，底层房间的天花板也要有同样的高度．因为应同时满足这个要求和他的规则，帕拉迪奥必须小心地调整房间尺寸．为了获得这种协调，帕拉迪奥允许例外，并且用估计值满足要求．

问题**3**　回忆5.3节，帕拉迪奥对基耶里凯蒂宫底层进行了设计，确定了大房间的尺寸为18×18及18×30威尼斯尺，中心大厅的尺寸为16×54威尼斯尺．所有带拱顶房间的高度都是24英尺．解释为何这些高度的选择都和帕拉迪奥的规则一致．

给定两个正数a和b，考虑线段长度为a和b．对a和b的毕达哥拉斯学派的3种平均数中每一个，都有可能用尺规构造出一条长度与它相等的线段．这一事实允许建筑师构造出这些长度．图5-59证明了这种构造的基本要素．如何进行构造将在下文的问题4中解释．（它的解答可能受益于2.2节．）a和b中必有一个比另一个大或者与之相等．假设这个数是a，设$a \ge b$．图5-59(a)展示了长为a和b的线段及它们各自的端点A、P和B．

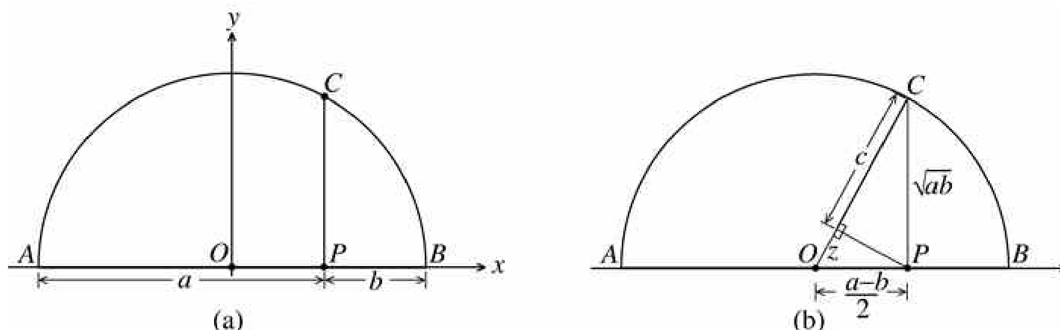


图　**5-59**

问题**4**　解释如何构造线段AB的中点O．注意线段AO的长度等于算术平均数$\frac{a+b}{2}$．画出以AB为直径的半圆，建立xy坐标系，使其原点在O点，如图5-59(a)所示．

i. 解释如何构造垂直于AB的线段OP．验证CP的长度为$\frac{a-b}{2}$．使用圆的标准方程（参见4.3节），证明CP的长度为几何平均数$\sqrt{ab}$．

ii. 图5-59(b)展示了线段OC被过P点的垂线分成长度为c和z的线段．两次使用毕达哥拉斯定理来求解 $c^2 - z^2 = (c + z)(c - z)$，，接着求 $c - z$ 和 2 c，证明c为调和平均数$\frac{2ab}{a+b}$．

iii. 证明不等式$b \leqslant \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant a$．

问题**5**　图5-60内的图选自达芬奇笔记的大西洋古抄本中的第455张对开页．设半圆的半径为两个单位长度（因此较小半圆的半径为一个单位长度），确定每个图中阴影处的总面积．

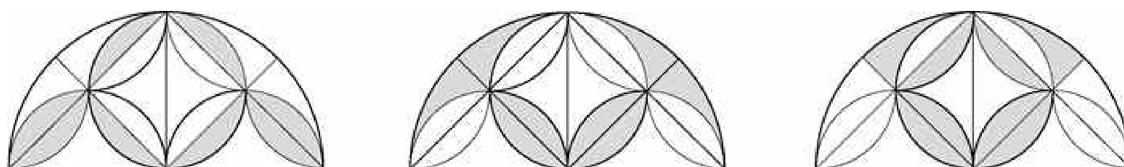


图　**5-60**

问题6　图5-61中，C为半径为1的圆的圆心，AD为直径，PB为该直径的垂线．证明$\alpha=\frac{1}{2}\gamma$．令$\gamma=45°$，计算CB和PB的长度．用毕达哥拉斯定理证明$AP=\sqrt{2+\sqrt{2}}$．推出$\sin 22.5°=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2+\sqrt{2}})}$、$\cos 22.5°=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$、$\tan 22.5°=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$．

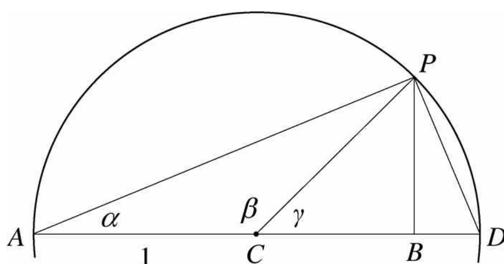


图　**5-61**

接下来的3个问题研究圣彼得大教堂穹顶的水平和垂直截面．穹顶有16个等间距分布的拱肋，它有助于我们理解正十六边形的几何形状．

问题7　图5-62(a)考虑半径为1的圆．因为 $16\times 22.5=360$，可以将其不间断地分成 22.5°，从而绘出它的内接正十六边形．设s为该正十六边形的边长．转向图5-62(b)，验证 $s^2=AB^2=AC^2+BC^2=\sin^2 22.5°+(1-\cos 22.5°)^2=2-2\cos 22.5°$．用问题6的一个结果，推出$s=AB=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\approx 0.390\ 2$．证明弧$AB$的长度为$\frac{\pi}{8}\approx 0.392\ 7$．

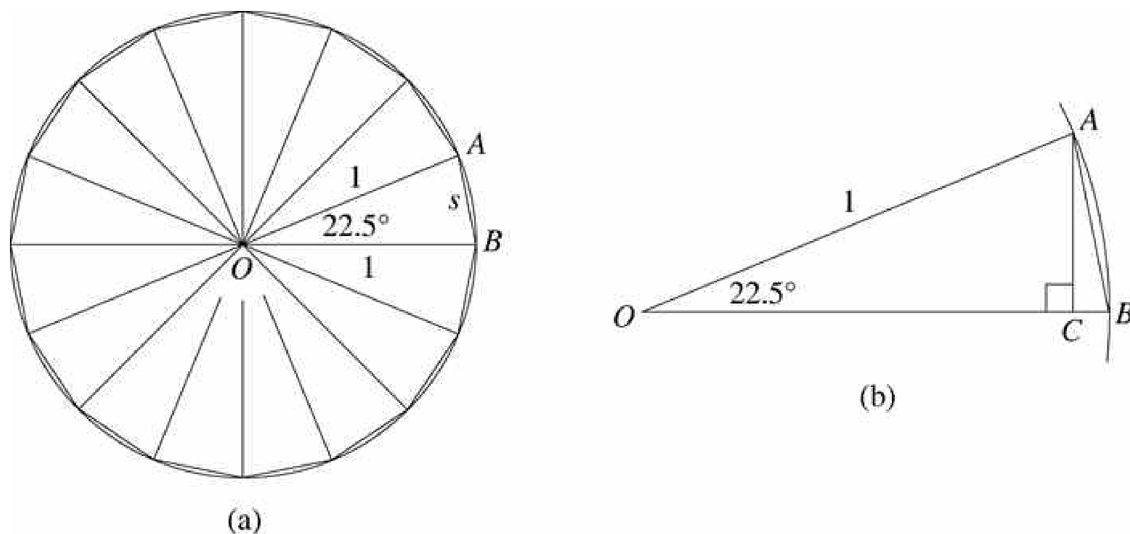


图 **5-62**

问题**8**　图5-63展示了*xy*坐标平面内的两条圆弧．它们所在的两个圆的圆心都在*x*轴上，距离原点为*c*．圆弧分别与*x*轴交于*b*和-*b*．这两条圆弧确定一条哥特式拱．使这个拱绕*y*轴旋转一周，得到尖穹顶．用圆的标准方程推出该穹顶的高度*h*为$h=\sqrt{b^2+2bc}$．证明该穹顶的高跨比为$\frac{h}{2b}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2c}{b}}$．这个穹顶的所有水平横截面都是圆．用*b*、*c*和y_0，确定穹顶基部上方y_0单位处的圆的半径*r*．

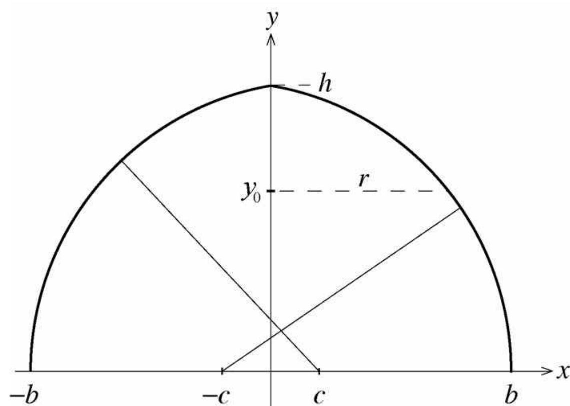


图 **5-63**

问题**9**　图5-64展示了圣彼得大教堂穹顶从起拱点向上的截面．它与图5-37截面的比例相同，可知穹顶的内表面具有问题8所描述的形状，其

中$\frac{c}{b}\approx\frac{1}{6}$．用问题8中的一个结论，证明圣彼得大教堂穹顶内侧的高跨比约等于0.58，半穹顶的高跨比等于0.5．

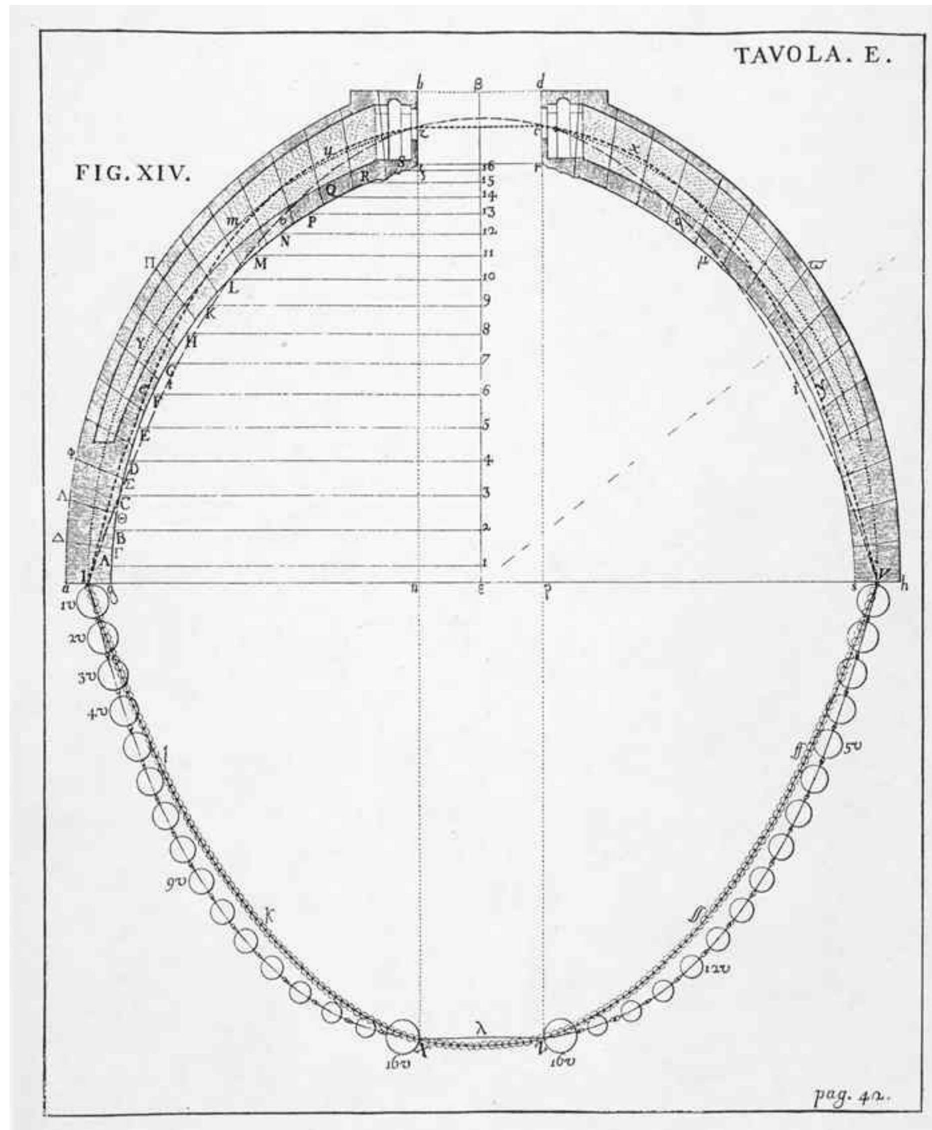


图**5-64**　乔万尼·波莱尼的表**E**细部，选自《梵蒂冈教堂大穹顶损害及其修复的全面回忆，分为五卷》（***Memorie istoriche della gran cupola el Tempio Vaticano e de'danni di essa, e de'ristoramenti loro, divise in libri cinque***），出版地为帕多瓦，**1748**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

讨论**5.1**　论古典柱式　在建筑领域，单词柱式（order）指一些按照严格分配比例的柱子与相关部件中的一种．在《建筑十书》中，维特鲁威

评论了希腊文本（现已轶失），挑出了3种柱式：多里安式（最坚固的一种，据说基于男性的比例）、爱奥尼亚式（比较轻盈，反映了女性的比例）以及科林斯式（最修长最华丽，让人想起年轻女性的形体和比例）．托斯卡纳和混合柱式源自罗马．它们修改并混合了早期希腊柱式中的元素．为了与文艺复习时期的理性精神保持一致，人们用精确的数字比例表达这些柱式．这也是帕拉迪奥的《建筑四书》想要达到的目标之一．帕拉迪奥的方法受到维尼奥拉（1507—1573）的早期著作《五大柱式规则》（*Regola delle Cinque Ordini d'Architettura*或 *Canon of the Five Orders*）的影响．维尼奥拉是一名建筑师，名字来自他出生的意大利小镇，他在米开朗基罗（及后来的德拉·波尔塔）之后，成为圣彼得大教堂的主建筑师，参与建造了穹顶侧翼的两个小穹顶．（见图5-44．）

维尼奥拉的著作是一本带插图的手册，解释了如何设置柱式．举个例子，维尼奥拉用圆柱柱础的直径D来确定它的高，具体如下：多里安式8 D、爱奥尼亚式9 D、科林斯式10 D、托斯卡纳式7 D、混合式10 D．柱子的结构部件包括竖立柱子的柱础和它顶部的柱头．基座是放柱础的石块，柱顶盘是柱子所支撑的水平部件．维尼奥拉将基座、柱子（包括柱础和柱头）及柱顶盘的高度之间的比例设置为4∶12∶3．这些比例是他根据古典范例得出的．例如，他的多里安柱式就是基于罗马马赛卢斯剧院的比例，科林斯式柱式是基于哈德良的万神殿．（参见图2-36和图2-42．）

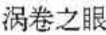
爱奥尼亚式柱典型和突出的特点是装饰在柱头的涡卷形结构，称为爱奥尼亚式涡卷．伦敦大英博物馆内的一个例子如图5-65所示．构造爱奥尼亚式涡卷的螺旋曲线的所有方法都是将其作为一系列圆心和半径各不相同的有组织的圆弧（使用直尺和圆规）．维尼奥拉的著作给出了其中的一种方法，该方法建立在希腊人和罗马人采用的步骤的基础上．在讨论该方法之前，我们先介绍荷兰人尼古劳斯·戈尔德曼（1611—1665）的构造方法．戈尔德曼为建筑师写实践手册，在荷兰的莱顿城教授数学和建筑学，他的方法出现在1649年维特鲁威的阿姆斯特丹版作品中．18世纪，它被引入到英语国家的建筑界．

戈尔德曼构造涡卷时，先从眼部，即位于正中心的圆开始．构造方法如彩图22和23所示，下文将进行解释．先画一个半径为r、圆心为C的圆作为眼部．半径r及C的位置取决于柱子的直径，后面再确定．在垂直轴上

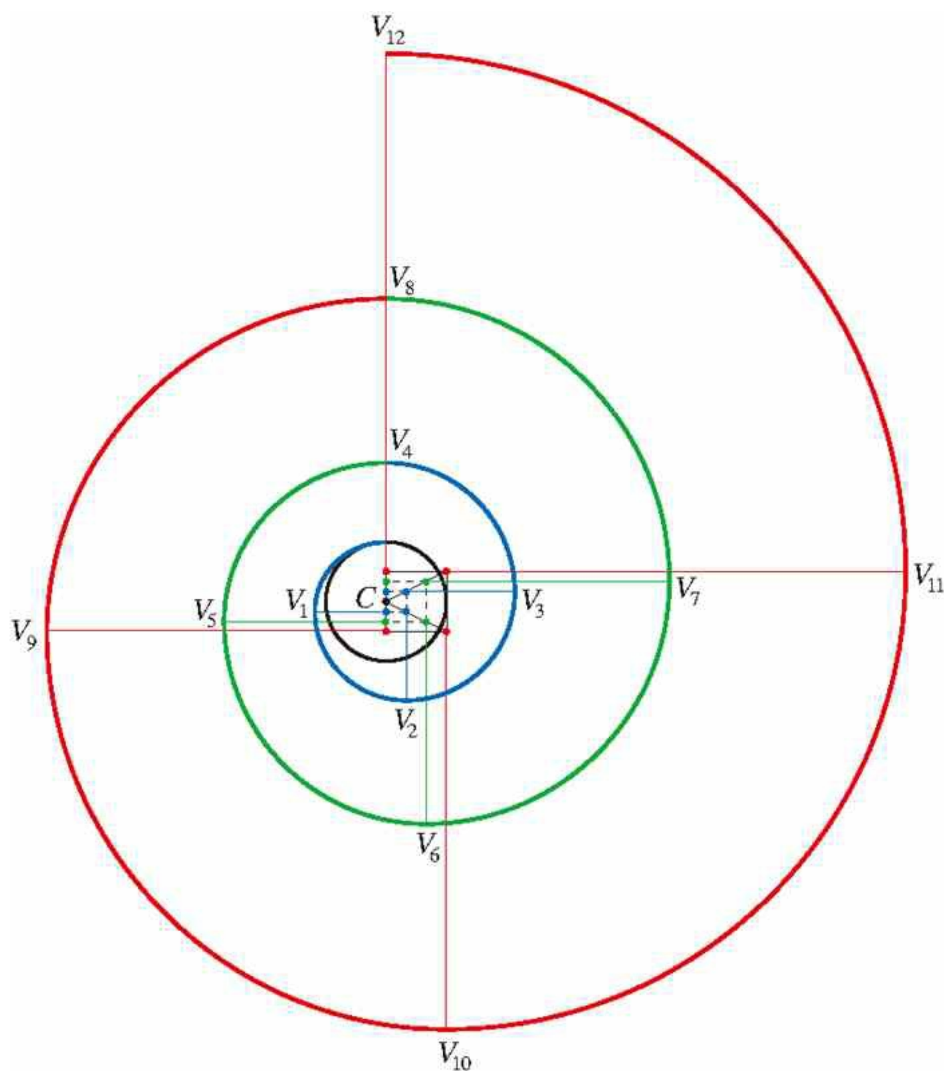
取蓝点1和4，使其距离C为$\frac{r}{6}$．添加蓝点2和3，使4个蓝点组成一个边长为$\frac{r}{3}$的正方形．（把数字和颜色标记及点联系起来会使表述更简单．）在垂直轴上取绿点5和8，使得每个点距离C为$\frac{r}{3}$．选择绿点6和7，使这4个绿点组成边长为$\frac{2r}{3}$的正方形．最后，在垂直轴上取红点9和12，使得每个点距离C为$\frac{r}{2}$．选择红点10和11，使它们组成边长为r的正方形．现在已经完成这一构造法中最重要的部分了．点1到12是构成整个涡卷的圆弧的圆心．（可以用尺规作图实现这种涡卷的构造方法，不过这里我们将不再详细说明．）



图**5-65**　伦敦大英博物馆内的爱奥尼亚式柱．**Wayne Boucher**摄，**©Cambridge 2000**



彩图 **22**　戈尔德曼的爱奥尼亚式涡卷构造，从眼部开始



彩图 **23**　戈尔德曼的爱奥尼亚式涡卷构造法，以螺旋线做结

现在取一个圆规．将它的一个脚放在点1上，沿垂直轴将另一个脚拉到垂直轴与圆的交点处．从交点处逆时针绘制一条等于$\frac{1}{4}$圆的圆弧，在点V_1处停止．这条圆弧的颜色与它的蓝色圆心相同，其半径为$R_1=r+\frac{r}{6}=\frac{7r}{6}$．现将圆规的脚放在点2，将另一只脚拉到$V_1$，逆时针绘制一个$\frac{1}{4}$圆，在点$V_2$处停止．注意第二条圆弧的半径$R_2=R_1+\frac{r}{3}=\frac{9r}{6}$．接下来，将圆规的脚放在点3，将另一只脚拉到$V_2$，绘制一个$\frac{1}{4}$圆，到$V_3$

停止，其半径$R_3=R_2+\frac{r}{3}=\frac{11r}{6}$．彩图23展示如何继续进行这一模式．在每一步，$\frac{1}{4}$圆的颜色都与它所在的圆的圆心点相同．以点4为圆心、从V_3到V_4的圆弧半径$R_4=R_3+\frac{r}{3}=\frac{13r}{6}$．这就完成了涡卷的蓝色部分．第一条绿色弧的圆心为点5，半径$R_5=R_4+\frac{r}{2}=\frac{16r}{6}$．第二条、第三条和第四条绿色$\frac{1}{4}$圆的圆心为点6、7和8．注意它们的半径每一步都增加$\frac{2r}{3}$．特别地，$R_8=R_5+3\times\frac{2r}{3}=\frac{28r}{6}$．从$V_8$到$V_9$的第一个红色$\frac{1}{4}$圆的圆心为点9，半径$R_9=R_8+\frac{5r}{6}=\frac{33r}{6}$．第二个、第三个和第四个红色$\frac{1}{4}$圆的圆心为点10、11和12．它们的半径每一步都增加r．因此$R_{12}=R_9+3r=\frac{51r}{6}$．到达$V_{12}$点后，涡卷就完成了．

还有最后一个问题．确切地说，相对于柱子，涡卷的中心C应在哪儿？r的大小应为多少？答案是它们都要由爱奥尼亚式柱在柱础处的直径D确定．在水平方向，中心C到柱子中轴的距离应为$\frac{1}{2}D$．在垂直方向，要求C位于涡卷所支撑的部件的下方$\frac{1}{4}D$处．因为从C到V_{12}的距离为$\frac{r}{2}+R_{12}$，这意味着

$$\frac{1}{4}D=\frac{r}{2}+R_{12}=\frac{r}{2}+\frac{51r}{6}=\frac{54r}{6}=9r$$

因此$r=\frac{1}{36}D$．

戈尔德曼的爱奥尼亚式涡卷构造法最好从眼部开始向外扩展，这也正是本文所介绍的方法．它也可以从外侧向内进行，即先绘制从V_{12}到

V_{11}、圆心为点12的$\frac{1}{4}$圆，再从那里开始逐渐向眼部递减.

问题**10**　小心地使用直尺和圆规，根据上述戈尔德曼方法构造柱础直径D =18英寸的柱子的爱奥尼亚式涡卷.

图5-66的涡卷是用戈尔德曼的方法构造的（根据该图中心处的图形确定）. 内部的第二条螺旋线位于第一条内侧并与其平行. 它用的方法和第一条相同，只是统一稍微改变了圆弧的圆心和半径.

维尼奥拉扩展了希腊—罗马人构造爱奥尼亚式涡卷的方法. 与戈尔德曼的构造方法很相似，维尼奥拉的方法要绕眼部螺旋3次. 其基本观点与戈尔德曼的方法相同，唯一的差别是圆弧的圆心位置. 图5-67展示了12个中心点. 这些点位于所谓的文艺复兴菱形的内部，和彩图22中戈尔德曼的方法一样，记为1到12. 从A到B的圆弧圆心位于点1. 从B到C 的圆弧圆心为2. 它们的半径如虚线所示. 按照这种模式，就完成了涡卷. 用同样的方法构造内螺旋线，靠近点1到12的小标记给出了12条圆弧的圆心位置. 第一条弧从A'出发到达B'. 它的半径是另外一条虚线. 图5-68中的涡卷由帕拉迪奥构造. 在左上角及眼部内均可以看到文艺复兴菱形，由此可知他使用了上述方法.

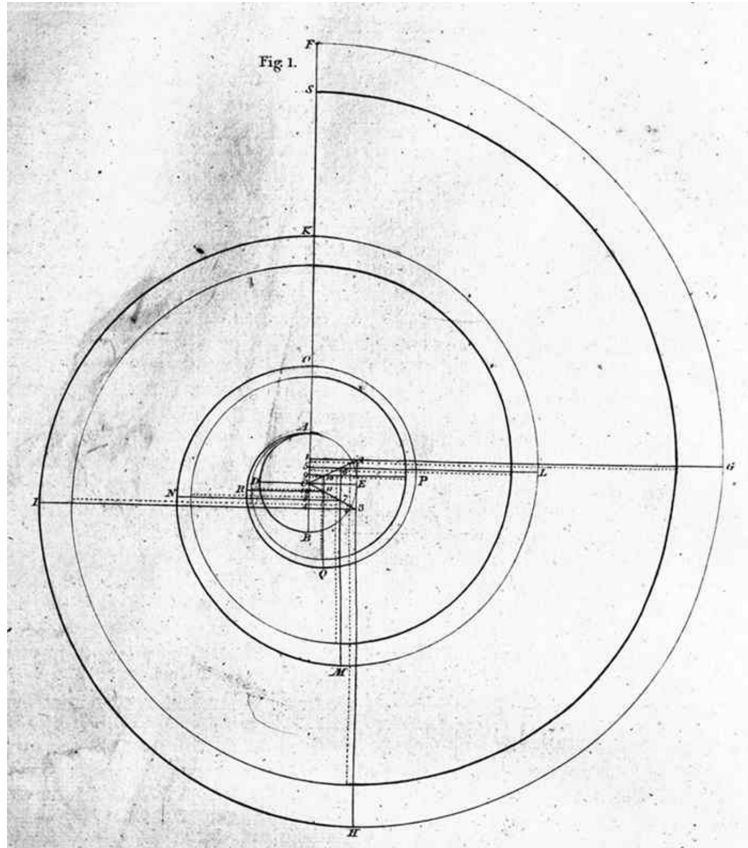


图**5-66**　选自**William Chanders**爵士的《论民用建筑：内含艺术准则及由最佳人手悉心设计并精美雕刻的大量插图》（***A Treatise on Civil Architecture: in which the Principles of the Art are laid down, and Illustrated by a great number of plates, accurately designed, and elegantly engraved by the best hands***）．**J. Dixwell**出版，伦敦，**1768**（第**2**版），**p25**

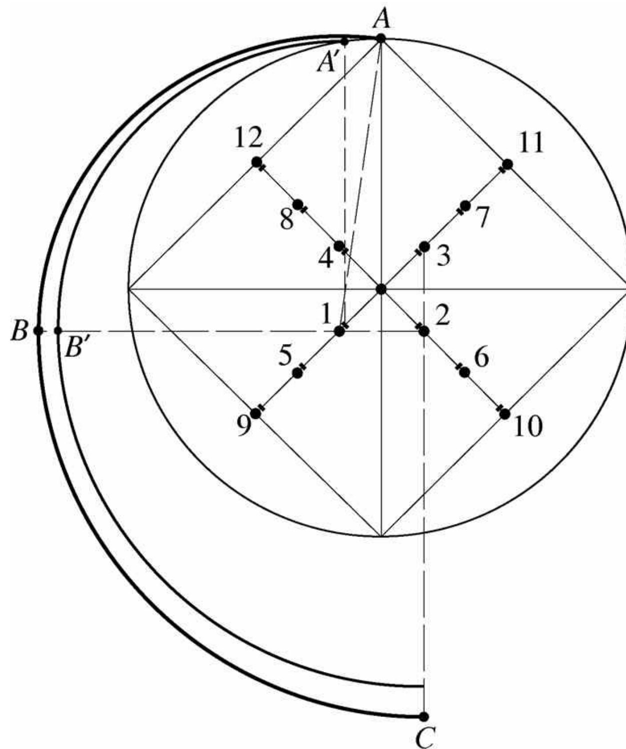


图**5-67**　文艺复兴菱形

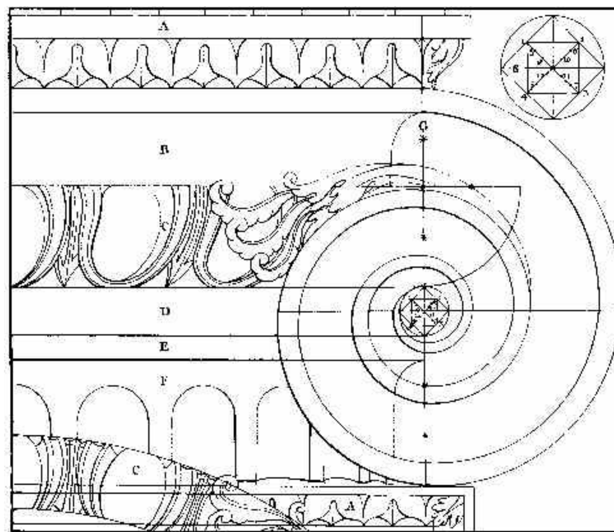


图**5-68**　帕拉迪奥的爱奥尼亚式涡卷

讨论**5.2**　圣彼得广场的方尖碑　几个世纪以来，旧圣彼得大教堂附近都矗立着一座埃及方尖碑．西斯科特五世——教皇中伟大的建筑师一登上教皇宝座，就宣布想要将这座方尖碑移到新圣彼得教堂前方广场的中心．这座方尖碑只用一块红色花岗岩建成，有24米多高，重量超过

317.5吨．将其移到237.7米外的新位置将是工程上的一项创举．

1586年，500名数学家、工程师和其他人员提出了移动方尖碑的最佳方案．罗马建筑师多梅尼科·丰塔纳的策略最后得到批准．（正是多梅尼科·丰塔纳在两年后协助吉阿科莫·德拉·波尔塔建设圣彼得大教堂的穹顶．）丰塔纳将方尖碑装入用铁条紧箍的厚木箱内．他设计了一个由脚手架、绳索、绞盘和滑车组成的复杂系统，并将其搭建好．图5-69展示了其中的一些结构．900名体力劳动者和75匹马组成的队伍严阵以待，为它提供动力．在万众瞩目下，方尖碑从它的石头基座上抬起，高度正好允许放置它的大型马车（该马车是为这一目的特别打造的）通过．一星期后，方尖碑被放下，水平搁到马车上．等夏日的酷热过去后，马车被人们拉着沿一条特别铺设的轨道前进，直到新位置．图5-70描绘了这一场景．更庞大的人群聚在一起观看方尖碑被抬起来放好．教皇发布了严格的命令，要求人们保持安静，抬起时又一次用到了绳索、绞盘、滑车、人和马．当其中一根绳索在压力下似乎要断裂时，人群中爆发出一声大喊："往绳子上泼水！"这条指令由一个熟悉绳子特性的水手发出，明显拯救了这一天．方尖碑被成功放下．而违抗命令的水手也得到了宽赦．

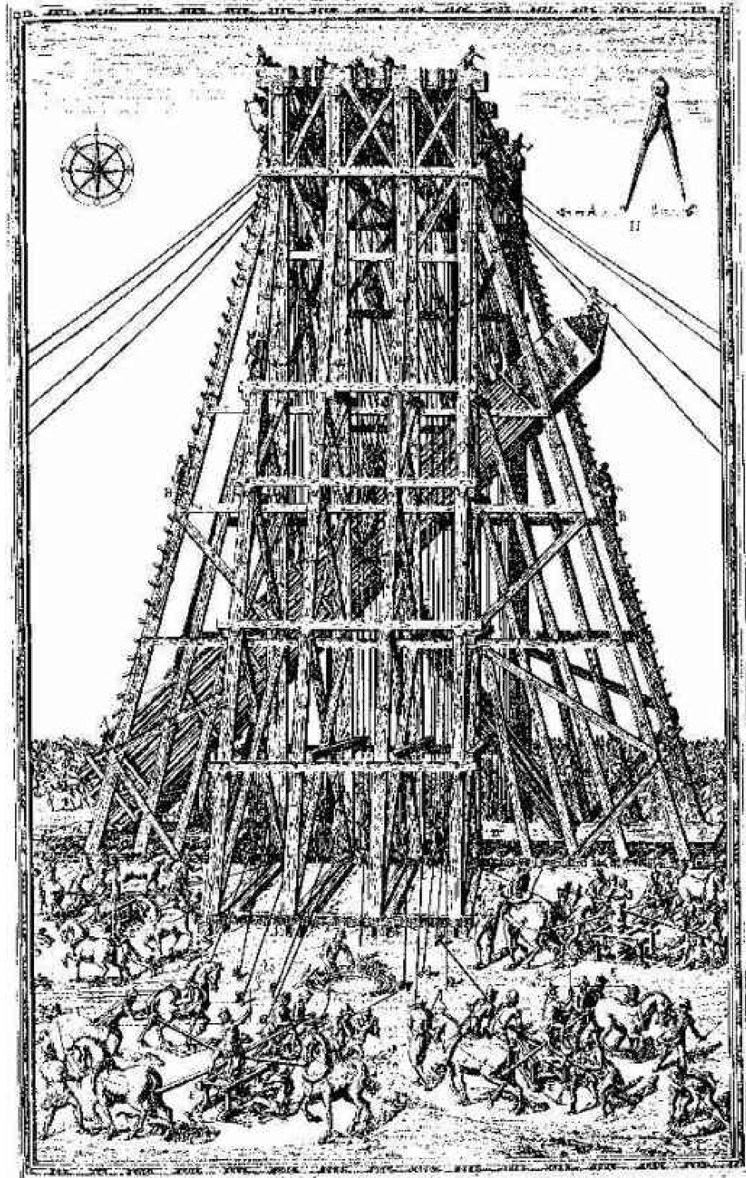


图**5-69**　纳塔莱·博尼法乔为多梅尼科·丰塔纳的手稿《梵蒂冈方尖碑的迁移》（***Della Transportatione dell' Obelisco Vaticano***）绘制的插图，**1590**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室



图**5-70**　纳塔莱·博尼法乔为多梅尼科·丰塔纳的手稿《梵蒂冈方尖碑的迁移》绘制的插图，**1590**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

将方尖碑从一个位置移动到约238米外的另一个位置的壮举在当时被称赞为技术的胜利．但考虑到方尖碑的历史，这是让人诧异的评价：公元前1000年，它就为埃及法老开采、移动并竖立起来．公元前30年至公元前20年期间，罗马皇帝奥古斯都将其运到埃及的亚历山大．几十年后，方尖碑被装到船上，横穿地中海，来到罗马．试想一下人们从单独的一块石头切割出如此巨大的方尖碑并将移动时，能使用的只是诸如钉子、锤子、坡道、杠杆和绳索这样的工具以及由人和动物提供的动力，真是让人瞠目结舌．方尖碑可能是通过插入木楔从花岗岩层挖掘的，这些木楔用水浸泡后会膨胀，从而使花岗岩裂成块．埃及浅浮雕告诉我们可以用大型驳船运输方尖碑．很有可能，人们将其拉到土墩上，再倾斜，让其滑到指定位置，从而将它放到底座上．

接下来的一组问题讨论透视法．5.7节阿尔伯蒂的地板那部分内容里，我们遇到了几组平行线，在用透视法绘图时它们将交于消失点．（除了与绘画者观察点平行的那些线，它们没有交点．）平行线一般会定义我们所观察的场景或物体的基本形状．可知一般图画中会有几个消失点．相应地，人们会称其为一、二或三点透视．图5-49(b)中对阿尔伯蒂地板的描述及对其垂线和对角线的关注正是两点透视的一个例子．

问题**11**　研究彩图20拉斐尔的《雅典学派》及彩图21潘尼尼的《圣彼得大教堂 内部》．确定每幅画中消失点的位置．

问题**12**　一般认为图5-71中著名的《理想城市透视图》（*Perspective View of an Ideal City*）是皮耶罗·德拉·弗朗西斯卡（约1420—1492）的作品．研究它并找出消失点的位置．德拉·弗朗西斯卡是意大利文艺复兴早期的伟大艺术家之一．他可能在佛罗伦萨研究了菲利波·布鲁内莱斯基的建筑和马萨乔的画作．他更有可能熟悉莱昂·巴蒂斯塔·阿尔伯蒂关于绘画和透视法的文章．他也是当时重要的数学家之一，他写过几本书，促进了算术、代数和几何学的发展，提出了自己关于立体几何和透视法的观点．他的一些作品后来出现在其他一些著作中，著名的有卢卡·帕乔利的《论神圣比例》．



图**5-71**　《理想城市透视图》，据称为皮耶罗·德拉·弗朗西斯卡的作品，约**1470**年．马尔凯国家博物馆，乌尔比诺

问题**13**　著名的德国画家和绘画艺术家阿尔布雷希特·丢勒（1471—1528）与莱昂纳多·达芬奇处于同一个时代，他在设计中结合了数学知识．图5-72展示了丢勒 1525年的木刻《绘制鲁特琴的人》（*Man Drawing a Lute*）．用语言描述一下与丢勒在图5-47中所描述的场景有关的内容．

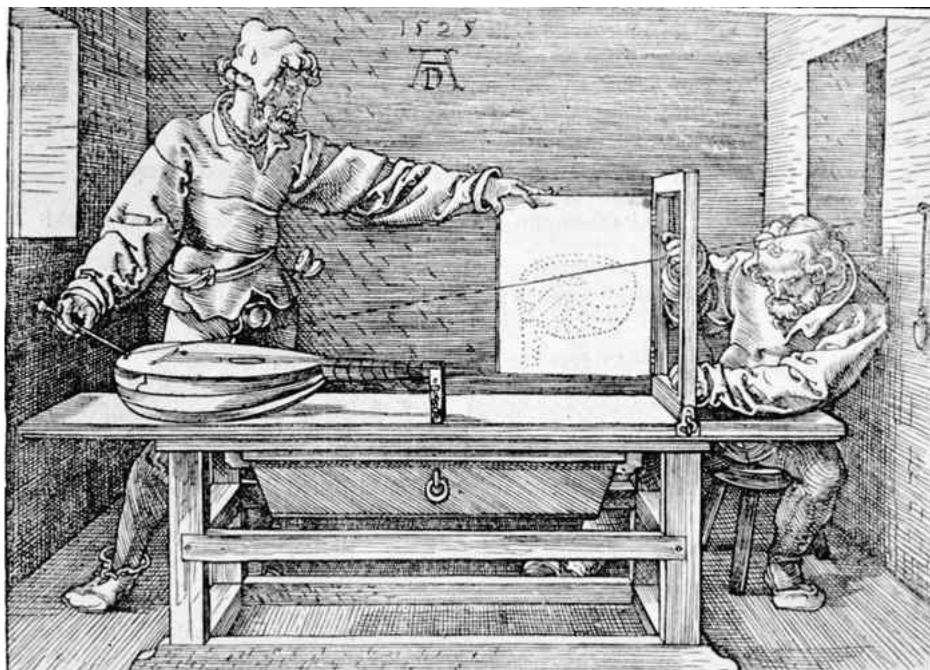


图**5-72**　阿尔布雷希特·丢勒，《绘制鲁特琴的人》，**1525**．大都会博物馆

问题**14**　看一下图5-73中四面体（4个面）、立方体（6个面）、十二面体（12个 面）和二十面体（20个面）的透视图．（八面体省略了．）据说它们都是莱昂纳多·达芬奇绘制的．不管艺术家是谁，无疑他制作了每个柏拉图立体的模型并将其作为绘画的基础．

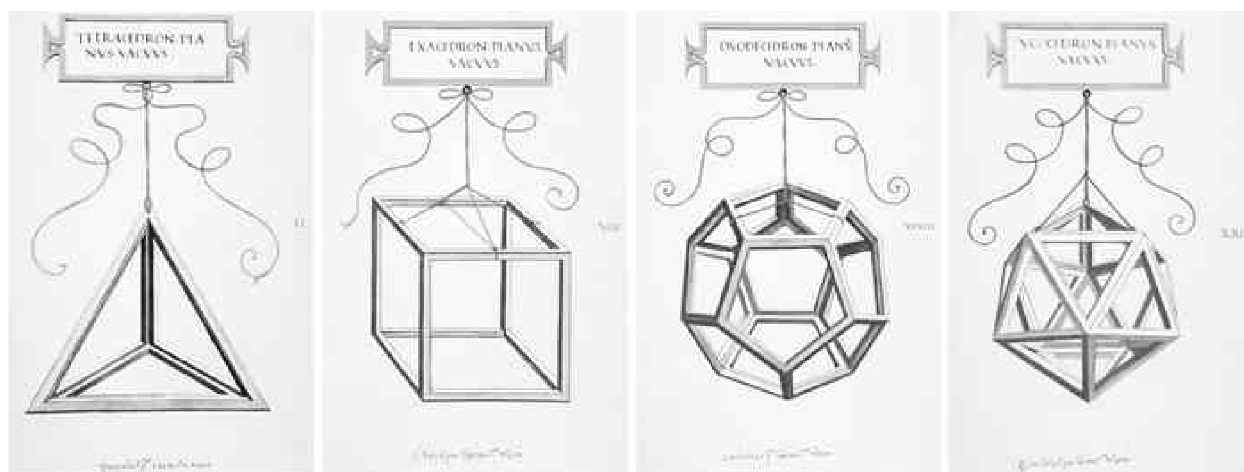


图**5-73**　莱昂纳多·达芬奇的木刻．选自卢卡·帕乔利《论神圣比例》（***Divina Proportione***），威尼斯，**1509**，安波罗修图书馆，米兰，手稿**170**上方，图**II**、**VIII**、**XXVIII**和**XXII.** 普林斯顿大学图书馆，马昆

问题**15**　考虑3个同样的黑色圆圈和它们的直径，如图5-74所示，它们被画在水平地板上．黑点代表站在同一块地板上的观察者的眼睛，他向外看着这3个圆．这3个圆与观察者间的距离相等．画出观察者将看到的3个圆及它们的直径．

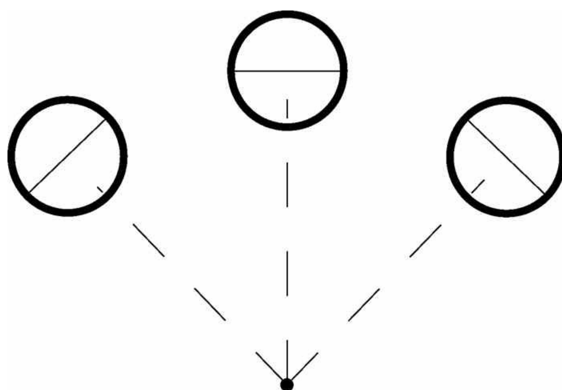


图　**5-74**

接下来的一组问题探讨5.7节中涉及解析几何（二维和三维）的一些问题．

问题**16**　两个点 $P_1 = (3,5)$ 和 $P_2 = (-2,7)$ 确定一条直线L．先取 P_1，再取 P_2，用$P_1 - P_2$的差，计算t的系数，从而求出L的两对不同的参数方程．再重复两次这一过程，确定L的4对不同的参数方程．

问题**17**　给定xy平面内直线的参数方程 $x = -3 + 5t$ 和 $y = 4 + 2t$．验证点(-3,4)和(7,8)在这一直线上．证明t的系数之比$\frac{2}{5}$等于该直线的斜率．点(0,5,2)和点(5,7,2)在这条直线上吗？点(1,5,5)呢？

问题**18**　找出过点(1,2)和(-3,-4)以及过点(2,1)和(3,6)的直线的参数方程．用它们求出两条直线的交点．

问题**19**　考虑由两个点 $P_1 = (1,2,3)$ 和 $P_2 = (4,6,8)$ 所确定的直线．列出L的参数方程．

i. 考虑平面 $x - 2y - 3z = 4$，确定直线L与该平面的交点．

ii. 考虑球 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$．r为何值时，L穿过该球？

问题**20**　任意两个不互相平行的平面相交都得到一条直线．确定平面 $3x - 4y + 5z = 2$ 和 $2x + y - 3z = 4$ 的交线的参数方程.

问题**21**　找出均包含给定直线 $x = 2 + 3t$， $y = -1 + 2t$， z -$1 + t$ 的两个平面的方程．【提示：$\frac{2}{3}(x-2)-\frac{1}{2}(y+1)-(z-1)=0$．】

问题**22**　取不同的e和d，重复绘制图5-49(b)中的瓷砖地板的透视图.

问题**23**　修改5.7节的论据，证明当在xz帆布平面上绘制xy地板平面内任一斜率m为非零的直线时，它们均交于水平线上的点 $(\frac{d}{m},e)$．

讨论**5.3**　更多透视法的问题　将5.7节中关于xyz坐标系内透视法的内容修改后，可以用在任一场景或物体中，而不仅限于阿尔伯蒂的水平地板．不过图5-47内的点P必须更一般地表示为 $P = (x_0,y_0,z_0)$，这样它就能代表地板上方和下方的位置（而不仅限于地板上的点）．在下列问题中进行这种变化，但让图5-47中的其他内容保持不变.

问题**24**　回顾直线及其参数方程，写出 $E = (0,-d,e)$ 和 $P = (x_0,y_0,z_0)$ 所确定的直线的参数方程．证明直线与帆布平面的交点为 $Q = (x_1,0,z_1)$，其中 $x_1=\frac{dx_0}{d+y_0}$ 和 $z_1=\frac{dz_0+ey_0}{d+y_0}$．

问题**25**到问题29中，e、d和h的值为 $e = 8$、 $d = 2$及 $h = 22$ 英尺．图5-47中地板所在的xy平面内长度单位是英尺，阿尔伯蒂的地板的瓷砖为边长等于1英尺的正方形．帆布所在的xz平面的长度单位为英寸.

问题**25**　转到图5-49．证明点 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4 和V为 $Q_1 = (-3,88)$、 $Q_2 = (3,88)$、$Q_3=(2\frac{2}{5},89\frac{3}{5})$、$Q_4=(-2\frac{2}{5},89\frac{3}{5})$和$V = (0,96)$（所有的坐标单位都是英寸）.

图5-75(a)描绘了阿尔伯蒂的边长为6的瓷砖，其中1个单位表示1英尺.

由于h=22，地板最下面的一条边离x轴22英尺．图5-75(b)代表用透视法绘制在帆布上的地板，其中1个单位代表1英寸．它使用了问题25的结论．图5-75(a)和图5-75(b)中的垂直虚线段表明x轴上方两个框图并不是按比例放置的．问题26到问题30中，每个问题的解都需要重复应用图5-75．求解这些问题时，在将相关信息从图5-75(a)中的地板转到图5-75(b)中的帆布之前，不要忘记先将英尺转换成英寸．

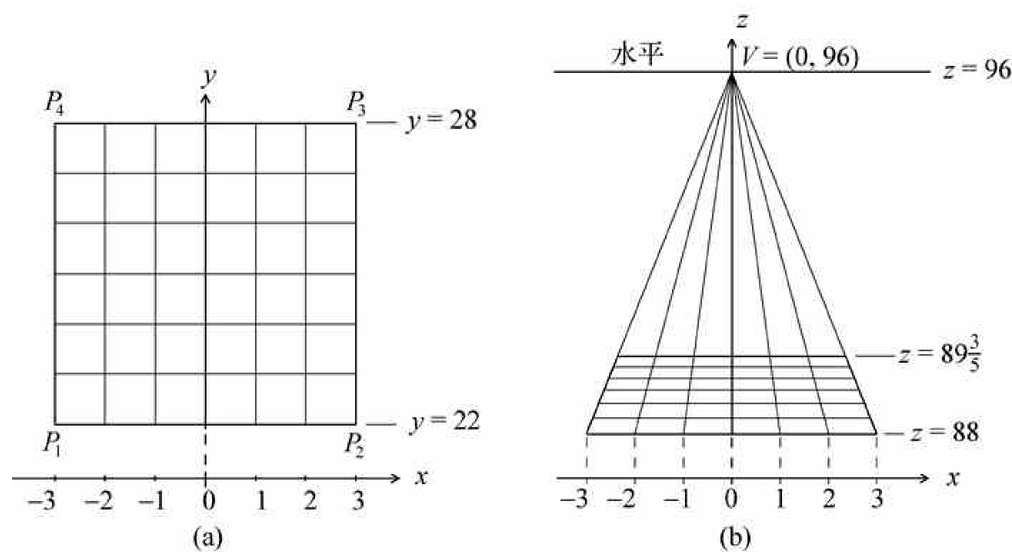


图**5-75**　**(a)**阿尔伯蒂的地板，比例为**1**单位=**1**英尺；**(b)**用透视法将阿尔伯蒂的地板绘制到帆布上，比例为**1**单位=**1**英寸

问题**26**　考虑图5-75(a)中地板所在平面上的一点 P = (-2,25)．将点P的投影影像Q放到图5-75(b)中．接下来考虑地板平面中的两条直线 x = 2和 $y = x + 24$．将它们在图5-75(a)中绘制出来．将两条直线的投影影像绘制到图5-75(b)中．这两条直线将交于水平直线 z = 96 的哪一点？

问题**27**　考虑图5-75(a)中地板平面上的直线 $y = 8x + 22$．它的透视影像交于图5-75(b)内直线 z = 88 上的哪个点？用问题23的结果，将该直线的透视影像绘制到图5-75(b)内．

问题**28**　图5-76描绘了图5-75(a)中阿尔伯蒂的瓷砖及4条线段．每条线段都经过地砖的中心，与x轴或y轴成 22.5°．根据相似三角形可知线段的8个端点确定一个正八边形．

i. 根据问题6的结论 $\tan 22.5^\circ = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$，证明图中的距离 $s = \dfrac{3}{1+\sqrt{2}} \approx 1.242\ 64$

.

ii. 用s确定点 S_1、 S_2、 S_3和 S_4 的坐标．使用估计 $s \approx 1\frac{1}{4}$，将这4个点以及整个八边形放进图5-75(a)内．

iii. 设 T_1、 T_2和 T_3 为 S_1、 S_2和 S_3 在图5-75(b)中帆布上的影像．用 $\frac{3}{1+\sqrt{2}} \approx 1.24$，证明 $T_1 \approx (1.24,88)$，T_2和T_3的z坐标分别约为88.55和89.20．将点 T_1、 T_2和 T_3 小心地放进图5.75(b)内．

iv. 利用消失点，将 S_4 的影像 T_4 放入图5-75(b)中．然后将点 T_1、 T_2、 T_3和 T_4 补充完整，得到正八边形的透视图．

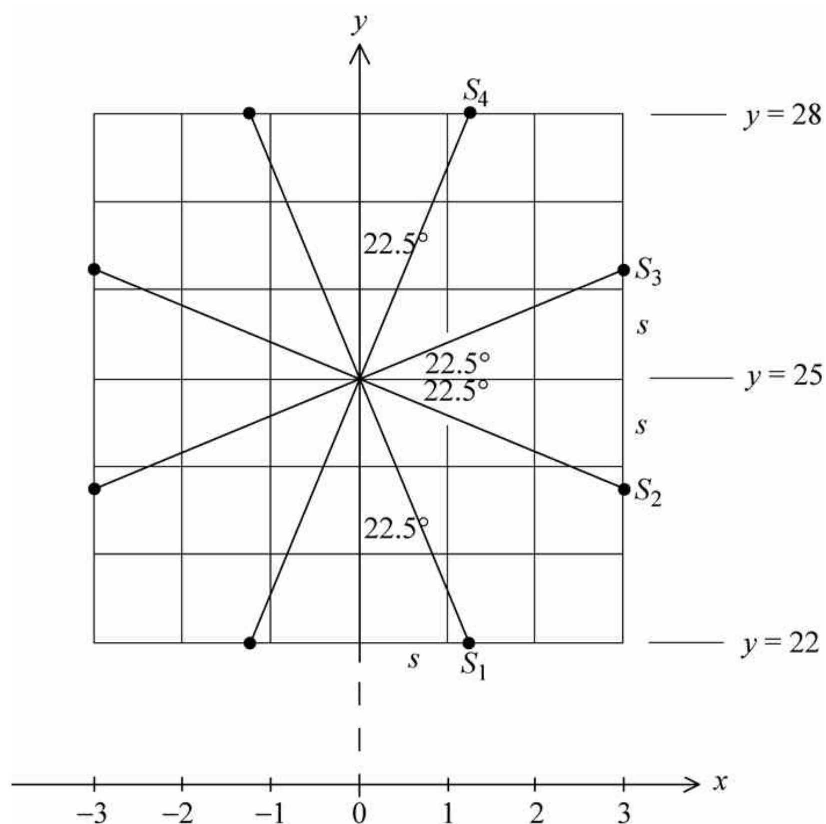


图**5-76**　阿尔伯蒂地板的八边形，比例为**1**单位**=1**英尺

问题**29**　回到图5-47中的6×6的瓷砖地板，将其向上扩展为6×6×6的立方

体．根据图5-75(a)和点 P_1、 P_2、 P_3、 P_4，分别用 P_5、 P_6、 P_7、 P_8表示在它们正上方的立方体的上面4角，找出这些点的坐标．接着找到两条边 P_5P_8 和 P_6P_7 所确定的直线的参数方程．证明这些边在帆布上的透视影像的延长线会交于消失点V．【提示：先用问题24的结论求两条直线中的代表性点．】

问题**30**　使用问题29的结论绘制立方体的透视图．先从底的透视图开始，如图5-75(b)所示，然后绘制4个上部顶点来将其补充完整．

我们接下来研究二次方程的例子和圆锥曲线，并考虑透视法的相关问题．

问题**31**　方程 $y=\frac{1}{2}x^2$ 、 $3x^2+4y^2=6$ 和 $3x^2-4y^2=12$ 的图形分别为抛物线、椭圆和双曲线．研究图5-52、图5-53和图5-54，将其用来确定抛物线的焦点和准线、椭圆的半短轴和半长轴以及限定双曲线形状的两条直线的方程．画出这3个图形．

问题**32**　画出方程 $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ 和 $\frac{(x-2)^2}{6^2}+\frac{(y-4)^2}{4^2}=1$ 的图形．【提示：这两个图形都是椭圆．先画出确定它们的方框．】

问题**33**　对方程 $x^2+4xy+4y^2+6x+12y+9=0$ 的左边做两步因式分解，证明该方程是退化的，它的图形是一条直线．

问题**34**　方程 $x^2+4y^2-6x+8y+9=0$ 的图形是一条圆锥曲线．用 B^2-4AC 的判据证明它是一个椭圆．用配方法重新整理该方程，使其能让人辨别出椭圆的中心和半短轴及半长轴．画出该椭圆的图形．

问题**35**　设 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+D=0$ 为圆锥曲线的方程．对圆锥曲线进行平移或旋转，该圆锥曲线的方程也随之变化，但 B^2-4AC 不变．另一方面，两条看起来极不相同的圆锥曲线也能有同样的 B^2-4AC．为什么抛物线提供了这类例子？转向椭圆，写出与圆 $x^2+y^2-1=0$ 的 B^2-4AC 相同的、非常扁平的椭圆的方程．

问题**36**　双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 和 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 有同样的焦轴，由同样的一对相交线确定形状．确定这对直线，并在同一坐标系内画出这两条双曲线的图形．

问题**37**　考虑方程$xy - 1 = 0$，即 $y=\frac{1}{x}$ 的图形．为什么根据上一节的理论，它的图形是一条双曲线？通过考虑 $y=\frac{1}{x}$ 的图形，确定规定这条双曲线形状的那对相交线，确定该双曲线的焦轴．通过绕原点旋转，该双曲线可以被转换为问题36中的两根双曲线中的一根，那么它要旋转多少度（以及向哪个方向旋转）？旋转后，它会成为问题36中的两根抛物线中的哪一根？

回顾图5-75中阿尔伯蒂的瓷砖地板及其在帆布上的影像．求解问题38和问题39需要熟悉基本事实2和3以及上一节所提出的椭圆方程的推导过程．考虑图5-77(a)中展示的阿尔伯蒂地板上的9个圆．图5-77(b)展示了它们在帆布上的影像．

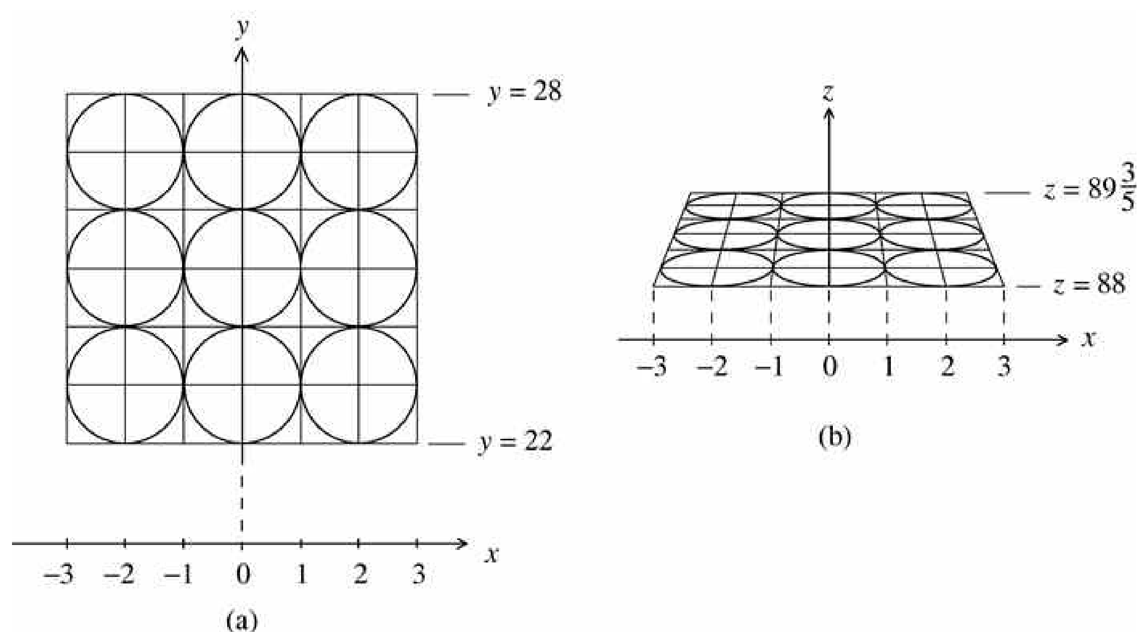


图**5-77**　**(a)**阿尔伯蒂的地板上半径为**1**的圆，比例为**1**单位**=1**英尺；**(b)**用透视法将圆绘制成椭圆，比例为**1**单位**=1**英寸

问题**38**　选出图5-77(a)中的圆心在y轴上的3个圆中的一个，写出该圆的方程．

i. 确定你所选择的圆的透视影像，即图5-77(b)中椭圆的方程．不仅针对具体的e=8、d=2和h=22，还要求e、d和h为一般情况时的方程．将方程写成 $Ax^2 + Bxz + Cz^2 + Dx + Ez + F = 0$ 的形式．

ii. 证明 $B^2 - 4\,AC = -4\,e^2((d + y_{cen})^2 - 1)$，其中$(0,y_{cen})$是圆心．

iii. 在图5-77的情况中，$d = 2$， $y_{cen} = 22 + 3 = 25$，因此有 $B^2 - 4\,AC <$ 0，(i)中方程的图形是一个椭圆．是否对每种d和h组合，都有这样的情况成立？讨论各种不同的可能性．

问题**39**　选择图5-77(a)中位于中间左侧或右侧的一个圆，列出它的方程．

i. 确定该圆的透视影像，即图5-77(b)中椭圆的方程．对一般的e、d和h，而不仅是具体的值e=8、d=2和h=22，确定椭圆的方程．将方程写成 $Ax^2 + Bxz + Cz^2 + Dx + Ez + F = 0$ 的形式．

ii. 如果你已正确回答了问题15，你就应知道这个椭圆被旋转了，这样它的焦轴就不是水平的．你能根据(i)的答案确定这一点吗？

图4-48的绘图，尤其是对圆柱的绘制，使用了从问题39获得的知识．

第6章　新建筑：材料、结构分析、计算机及设计

工业革命开始于18世纪中期，到19世纪迅速蔓延起来，并开创了一个新时代．蒸汽机驱动的机器以及铁的使用使得剧烈改变人类活动的规模和范围成为可能．大功率的汽船和机车能运输大量货物和乘客．机器驱动的铸造厂、磨坊及其他工厂雇佣大量的工人，大规模低成本地生产由金属、布料、人造纤维及塑料制成的商品．建筑工程配备的升降机、电梯和起重器以及汽车将材料运至现场，它们不再靠人和驮畜拉动，而是使用以燃油和电为动力的发动机．大规模的生产、施工和运输要求建设公路、铁路、桥梁、建筑物及其他基础设施．这就刺激了对铸铁、熟铁、配筋砌体、钢筋混凝土的使用以及对材料、结构和机械专家的需求．这些专业领域都发展出自己的工程学科，它们以阿基米德、伽利略和牛顿提出的力学、运动学和数学为基础，研究建筑材料和结构部件的负载、侧推力、应力及位移，并对这些材料和部件进行实验和测试．工程师是新的专业人士，他们为新时代建设基础设施．

18世纪和19世纪的欧洲由许多君主国统治，包括奥地利、英格兰、法国和俄罗斯．这个时期的建筑继续受到统治阶级品味及需求的影响，大多仍然是教堂、宫殿、官邸、政府建筑、银行、图书馆、博物馆及剧院．其中绝大多数建筑物仍然持续走古典路线．巴洛克式风格得到发展，这是一种富含装饰元素的古典样式，它与哥特式、文艺复兴和帕拉迪奥式传统密切相关．新的建筑材料和工程学科对该领域产生影响，但这种影响仍主要隐藏在建筑背后．这些影响在1887~1889年巴黎埃菲尔铁塔的建设过程中体现．工业时代的这一优美象征由弯曲的铁桁架构成，由结构工程师实现对它的设计．民族主义者的雄心壮志带来了民主运动和独立战争，有的成功，有的失败．这些活动在19世纪的最后几年里开始影响艺术和建筑．以“每个时代有自己的艺术，每种艺术有自己的自由”为口号，一些艺术家和建筑师群体从维亚纳的艺术机构中分裂出来，成为这种精神的象征．同时，大西洋彼岸的芝加哥发表了一份强硬的声明，声称建筑“形式应服从功能”．自由建筑表达的精神与对建筑功能的需求（二者经常会彼此冲突）对此后的建筑设计共同产生了重要的影响．

帝国的统治一直持续到1914年，它们之间的冲突导致了世界大战的爆

发．机器的使用及工业时代的技术使这场战争带来空前的破坏和灾难．这场恐怖的战争终结了欧洲旧帝国的统治．继之而来的是一段不稳定时期，新建立的国家和新的民主机构想要确立自己的地位．几名20世纪前半叶颇具影响力的建筑师，包括弗兰克·劳埃德·赖特、勒·柯布西耶（Le Corbusier，原名Charles Édouard Jeanneret，他将祖父的名字 Le Corbésier 做了一下修改）、沃尔特·格洛皮乌斯和路德维希·密斯·凡德罗追 求用建筑表达新秩序．他们认为建筑的目标应是使人们的生活和工作空间与时代美学、技术和文化协调一致．建筑“不是容器，而是所处的空间”，而房子是“用来居住的机器”．用钢骨架支撑、装有玻璃幕墙、使用悬臂式混凝土板以及以平屋顶为特征的矩形建筑物开始代表新的国际风格．新建筑材料和电梯的发明使人们能在比最高的哥特式结构还要高很多的摩天大楼内建造生活和工作空间．计算机尤其是大功率计算机的设计和制造加速了上述发展．20世纪下半叶及21世纪初的建筑师，包括埃罗·沙里宁、约恩·乌松、弗兰克·盖里、圣地亚哥·卡拉特拉瓦以及诺曼·福斯特利用新材料和技术，创造了全新的建筑形式．

本章的目的是讲述新材料（钢筋砌体、铸铁、钢筋和预应力混凝土以及钛）和发展中的结构工程学科（材料测试、数学分析以及现代计算机技术）的故事．通过讲述，想要说明扩大了的建筑设计领域和人们所能建造的结构范围．不言而喻，这些都是复杂的问题，而本章只能给出几条重要的线索．

第一节探讨18世纪和19世纪一些有穹顶的伟大建筑，它们是伦敦的圣保罗大教堂、巴黎的先贤祠、圣彼得堡的圣以撒大教堂以及华盛顿的美国国会大厦．它们的穹顶外部极其相似，深受布拉曼特的坦比哀多和米开朗基罗的圣彼得大教堂的影响．但穹顶下的支撑部件则讲述了使用铁—钢筋砌体和铸铁的故事以及结构工程的进展．

第二节和第三节详细观察了18世纪英国、意大利和法国的工程师及科学家在结构工程方面作出的重要贡献．这是与基础应用几何学及物理学相关的内容．为了确定拱券或穹顶在什么情况下结构稳定，该部分内容调查了侧推力线和弯曲力矩，研究了张力、剪应力和摩擦力的影响．得出的结论影响了上文提及的穹顶设计，使得对它们进行稳定性评估成为可能．

本章的第四节讲述了悉尼歌剧院的历史．它建于1957~1973年，其施工展示了建筑师对创造精神的需求、工程师对建造可行性的坚持以及标准化生产的经济利益之间的冲突，非常有意思．预应力混凝土和球面几何

学都是基本要素，早期版本的计算机分析起到了重要作用．最后，第五节讨论了计算机对建筑的影响以及计算机辅助设计与制造的进展．这一技术使建筑设计的完成完全与过往惯例分离．我们将看到毕尔巴鄂内的古根海姆博物馆具有流畅、抽象的外形．它的建筑不受传统建筑材料的限制，是现代艺术．

6.1　结构演进：从伦敦圣保罗大教堂到华盛顿国会大厦的穹顶

伦敦圣保罗大教堂（建于1675~1710年）、巴黎先贤祠（建于1757~1790年）、圣彼得堡圣以撒大教堂（建于1818~1857年）以及华盛顿国会大厦（建于1856~1868年）的外表都是古典风格．每座建筑的正面都有一个或多个与罗马万神殿相似的门廊，都明显使用了科林斯式柱子和壁柱．最主要、最引人注目的特点是它们的穹顶．如图6-1所示，它们的穹顶设计极其相似．坚固的圆柱形底座支撑着圆形排列的柱子，即所谓的列柱廊．它们的里面是穹顶的鼓座．列柱廊支撑着一个圆形平台，平台边缘由被称为栏杆的围栏环绕．一个开有凹进去的窗户的阁楼从平台上升起．它是带拱肋的半球形穹顶的底座，穹顶上方有一座高耸的采光亭．图5-30表明这种设计直接或间接受到了布拉特曼的坦比哀多的影响．4种建筑中，上述部件的尺寸和比例各异，因此4座穹顶的美学冲击力也各不相同．表6-1告诉我们穹顶的尺寸也大相径庭．（注意没有一座的规模可与圣彼得大教堂的穹顶相比．）不过，4座穹顶间最重要的不同是其下方的支撑结构．“罩子下面”的东西正是本节的重点．

表**6-1**　**4**座穹顶及圣彼得大教堂穹顶的尺寸，单位英尺

	圣彼得大教堂	巴黎先贤祠	圣以撒大教堂	美国国会大厦	圣彼得大教堂
列柱廊外直径	137	111	110	125	187
鼓座外直径	110	81	87	105	159
（在底座处的）鼓座	112	69	74	98	138
穹顶内部的高度	58	34	42	98	92

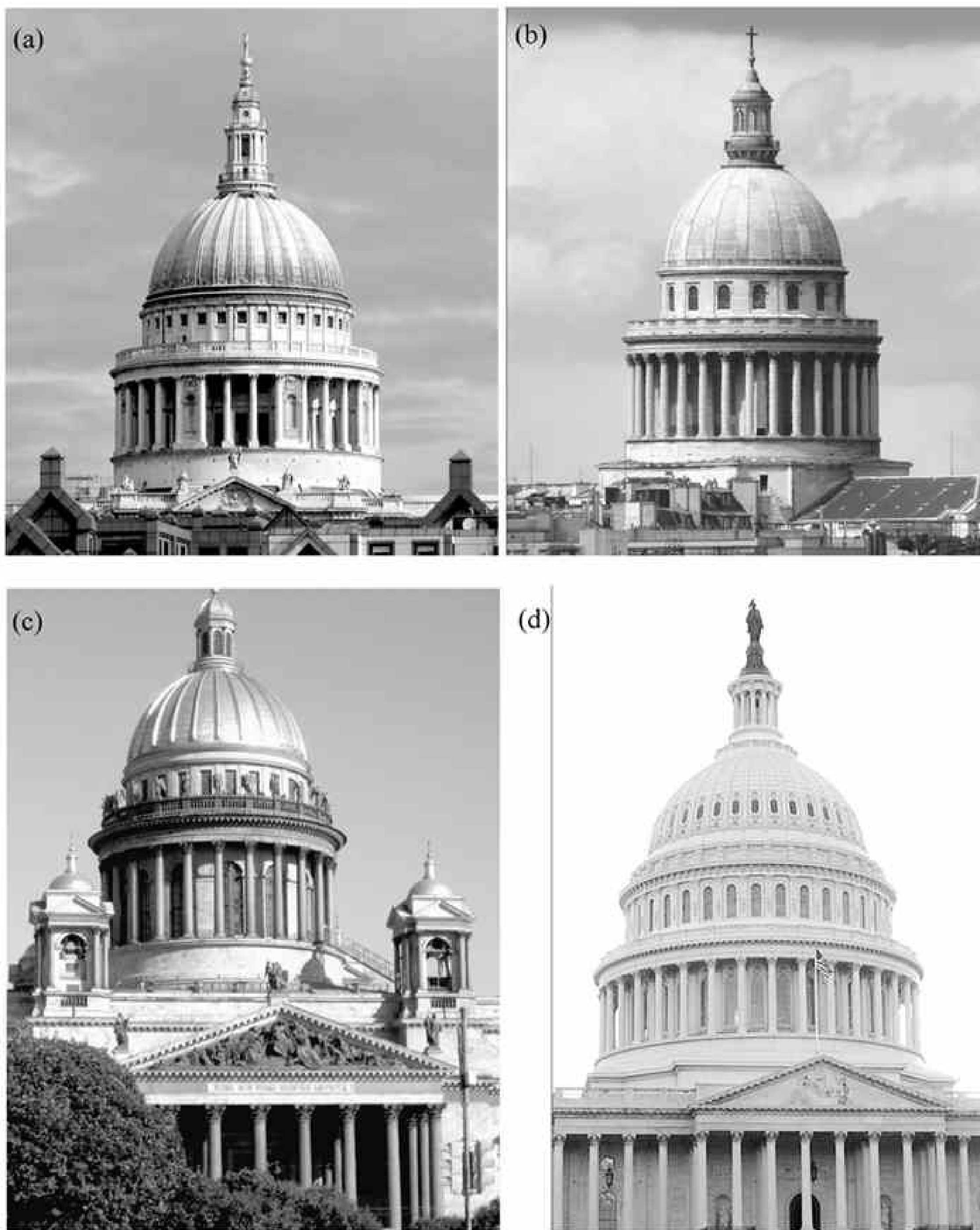


图**6-1**　各种穹顶．**(a)**伦敦圣保罗大教堂（**1705~1708**），**Bernard Gagnon**摄．**(b)**巴黎先贤祠（**1775~1781**），**Siren-Com**摄．**(c)**圣彼得堡圣以撒大教堂（**1840~1842**）**.(d)**华盛顿国会大厦（**1856~1864**），**Túrelio**摄

1666年，伦敦大火烧毁了该城$\frac{2}{3}$的建筑，圣保罗大教堂成为废墟．英格兰国王认命克里斯托夫·莱恩（1632—1723）监督该城的重建工作并重新建造圣保罗大教堂．莱恩是位数学家，其学术兴趣为几何学、天文学、航行术和测量以及与这些学科相关的仪器．莱恩与同时代的艾萨克·牛顿（提出微积分并将其用于行星运动理论，重新塑造了科学）和罗伯特·胡克（一位伟大的科学家，兴趣广泛）都是伦敦皇家学会的成员，该学会是专注于科学及其发展的知名机构．长期以来，建筑一度被认为是数学科学的一部分，远在被认命之前，莱恩就已对建筑，包括它的美学理论、比例以及建筑构件的强度产生了兴趣．大火发生前的两年，莱恩访问了巴黎．他观察了几座大型建筑物的施工并与其建筑师进行了讨论．当时人们正在重建罗浮宫（太阳王路易十四及其宫廷的住所）的一部分．莱恩写道：

> 此时，罗浮宫成为我每天的目的地，那里经常雇佣不少于一千人来参加劳动……总之，它成为一所建筑学校，可能是今天欧洲最好的一所．

巴黎郊区凡尔赛的夏宫大约也在那时开始施工．对路易及其随从而言，这里是更安全和奢侈的地方．在这里莱恩遇到了贝尼尼，贝尼尼差不多刚刚完成他在圣彼得大教堂巴洛克式内部及其广场大型柱廊的细节工作，他来到巴黎，为罗浮宫的新东立面做一些设计（不过这些设计后来都未被采用）．

新圣保罗大教堂的施工始于1675年．它成为当时最大的建筑项目．许多施工技术都可追溯到中世纪．用石子（即砖及石头碎片）及灰泥做墙壁和墩柱的中心，外面贴着大型琢石．莱恩将这种施工方法称为“废物—石”施工法，他知道在大负载下建筑构件会发生变形，但迫于经济因素，他不得不用这种方式建造新教堂的墩柱和墙壁．圣保罗大教堂的外墙很厚，足以降低对大量外扶壁的需求．砌筑拱顶使用从地面竖起的复杂木拱鹰架进行建造．拱顶上方是有三角形橡木桁架的屋顶（很像图3-13所绘），由中殿和侧廊的墙壁独立支撑．系梁是单独的木材，它们在中殿上方，长12.8米．

作为伦敦城的新地标以及皇室和英国国教的双重象征，新教堂需要是一座规模庞大，让人印象深刻的建筑．莱恩的理念是设计一座传统巴西利卡式的教堂，上面由穹顶覆盖，能高耸在城市上空．穹顶的设计是主要关注对象，贯穿整个教堂的施工过程．它经历了几个版本和几次修改．

莱恩完全清楚拱顶、穹顶及其支撑的负载给结构施加的向外的侧推力．他知道圣彼得大教堂穹顶沿子午线的那些裂缝，研究了圣索菲亚大教堂穹顶和拱顶的平面和截面图，并且了解威尼斯圣马可大教堂在原来的扁穹顶上所增加的由木材支撑的高耸、鼓胀的外壳．莱恩还知道巴黎一些设计新颖的穹顶．并没有证据表明莱恩或者他的顾问及同事胡克在圣保罗大教堂的施工过程中能够以任何精度估计大型结构中的负载和侧推力．但是，正如我们将在下文“悬链及升穹顶”一节中所见到的，他们确实知道哪种结构形状最能抵抗这类负载和侧推力．

圣保罗大教堂的穹顶有外壳、中壳和内壳，如图6-2所示.中间的壳是基础结构构件，它的形状是一个圆锥体，从与栏杆等高的圆形底座竖起，支撑大型采光亭．内壳几乎完全看不见，由砖砌成，墙壁只有45.72厘米厚，采光亭产生的挤压力让它保持稳定．它受到的环向应力被嵌在砖内不同高度处的4根铁链所限制．接近半球形的外穹顶能够被人们看见，它受架在砖砌圆锥体上的木框架的支撑．图6-3展示了砖砌圆锥体的外表面及一些木材．外壳的外部贴有圆形的铅片，内壳是独立结构的砖砌半球，除了自重外，不承担任何负载．它坐落在内鼓座上，由围绕在其底座的单独的一根铁链固定．教堂内表面上的湿壁画及从列柱廊的柱子间的24个大窗户透过的光线使其成为教堂内部的审美焦点．透过内壳的圆孔，可以看到砖砌圆锥体内表面顶部的绘画和窗户．该圆锥体顶部的另一个圆孔制造出这样的假象，即内壳是结构中较低的部分，它不断向采光亭内开放、向装饰性的圆柱体延伸．这座教堂的内部是英国巴洛克式，不奢华，风格朴素、经典．

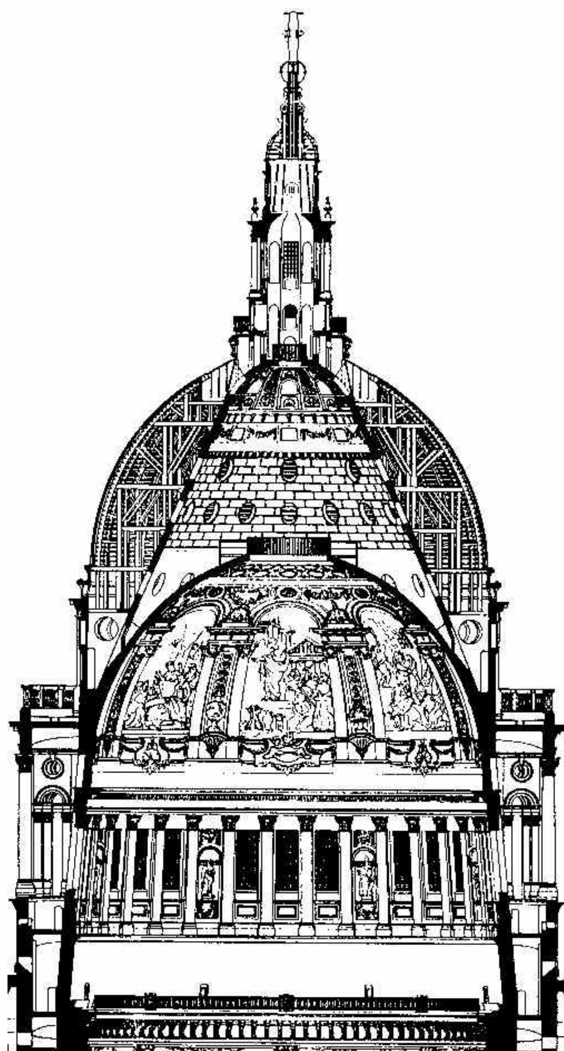


图**6-2**　莱恩的圣保罗大教堂的三重壳穹顶截面图．选自**Jacques Heyman**的《石骨架：石建筑的结构工程》（***The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture***），剑桥大学出版社，**1995**，图**8-9**



图**6-3**　架在砖砌圆锥体上以支撑外穹顶的内部木结构．伦敦科陶德艺术学院，康威图书馆．**A. F. Kersting**摄

与罗马的圣彼得大教堂进行的比较具有指导意义．圣彼得大教堂的施工需要120年（如果包括内部和柱廊，还需要25年）和12个建筑师．圣保罗大教堂则在一个主建筑师指导下只花费35年就完工了．圣彼得大教堂穹顶的外部延续了其垂直上升的正面，使它看起来像是要飞升．圣保罗大教堂栏杆与穹顶间的水平距离弱化了列柱廊的柱子对垂直向上的强调．圣保罗大教堂的穹顶看起来像是漂浮在空中；（比较图5-44和图6-1(a)）圣保罗大教堂有两个对称放置的尖顶，共同构成其正面．圣彼得大教堂也曾规划了类似的塔，但不牢固的底层土使贝尼尼终止了对它们的建设．表6-1告诉我们圣彼得大教堂的穹顶比圣保罗大教堂的要大得多．不过两座穹顶的重量差不多相等，每座都约为1亿磅．回想一下，为了限制引起宽裂缝的大的环向应力，人们在圣彼得大教堂穹顶的不同高度处用5根铁链对它进行加固．而圣保罗大教堂从未需要这类维修．莱恩的带圆锥形内壳的三重穹顶结构更坚固．

巴黎的圣日内维耶教堂是一座建于1756~1790年的新古典主义建筑．后来改名为先贤祠，如今是许多法国伟大的知识分子和文人的安葬和纪念地．它是传统巴西利卡式，有一个与罗马万神殿类似的门廊．和圣保罗大教堂一样，它的十字交叉处上方的穹顶也有三重壳，都是砌筑而成．除此之外，没什么特别的了．不过它有一个有意思的地方了．它的法国建筑师雅克斯·杰曼·苏夫洛想要建造一座将古典希腊几何学与哥特式教

堂的轻巧结构相结合的教堂．这一想法是颠覆性的，实际上，人们认为这是自相矛盾的．苏夫洛的设计没有遵循那时的传统和实践．砌筑的穹顶壳更薄，支撑它们的墩柱更细，中殿的窗户也要大得多．图6-4展示了圣彼得大教堂、圣保罗大教堂及圣日内维耶教堂在同样比例下的截面图．比较图中中等深度及深色的阴影区，可以看出，莱恩设计的穹顶由8根墩柱支撑，苏夫洛设计的只有4根．该图还表明苏夫洛设计的拱顶和墙壁更轻，那些纤细、独立的柱子起到结构作用．

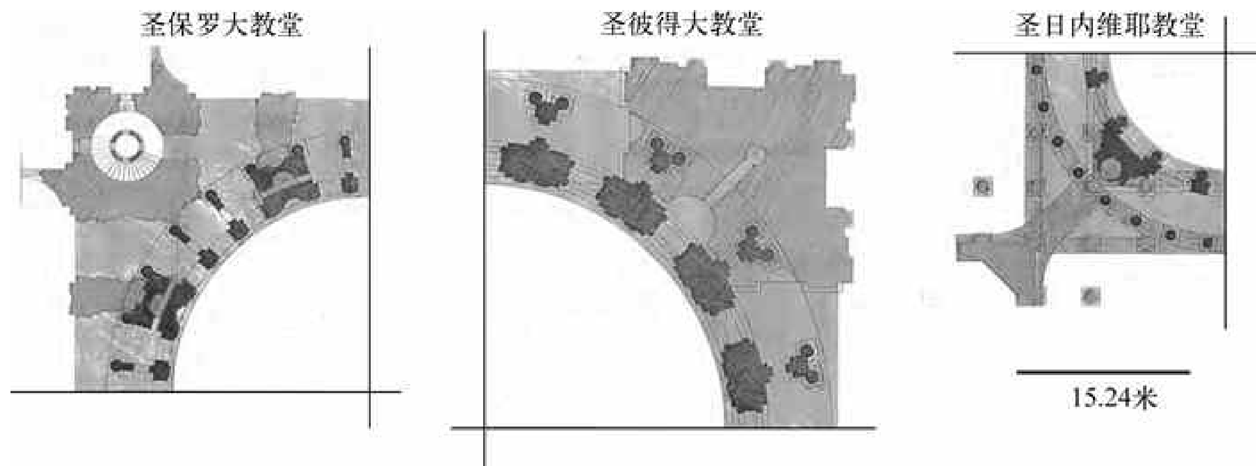


图**6-4**　比例相同的**3**种设计．深色区域表示穹顶在鼓座高度的结构部件，中等深度的区域表示在地板高度的支撑物，浅色区域表示鼓座下的桥拱券和帆拱．选自**J. Rondelet**的《法国先贤祠穹顶的历史记忆》（***Memoire historique sur le dôme du Panthéon FranÇaise***），巴黎，**1797**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

苏夫洛打算怎么完成有一个大穹顶的轻结构呢？他通过熟铁夹具和铁条来加固该砌筑结构，这会增加有效克服负载所需要的抗拉强度．图6-5展示了嵌入门廊石结构中的夹具和铁条．底下的图放大了该系统的一些构件．虽然罗马人已经用铜来加固万神殿的门廊，圣彼得大教堂的穹顶也已由铁链固定，而莱恩曾用铁杆加固圣保罗大教堂，但是苏夫洛对铁的大量而系统的使用仍是史无前例的．

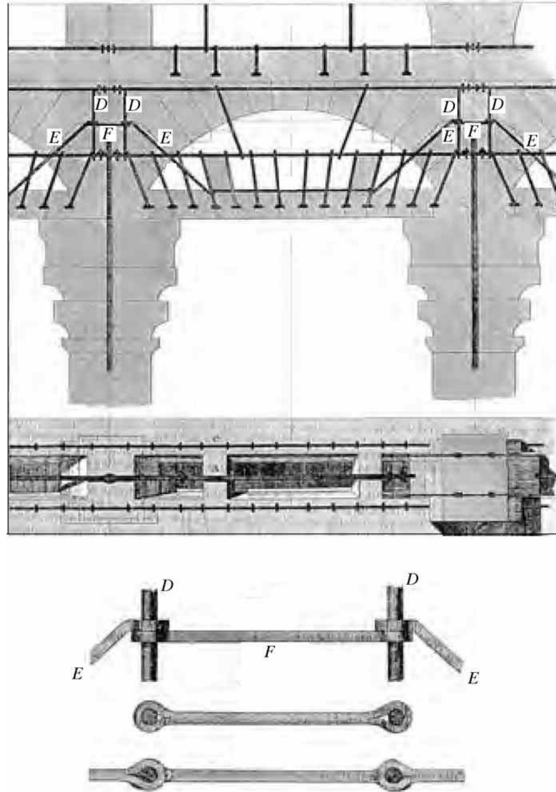


图**6-5**　选自**J. Rondelet**的《建筑艺术的理论与实践》（***Traité théorique et practique de l'art de bâtir***），巴黎，**1827～1832**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室，伊丽莎白基金会购买

毫无意外地，现有的秩序批评了这一设计．作为回应，苏夫洛及其同事，包括让-巴蒂斯特·龙德莱（他在1770年苏夫洛死后作为建筑师接管了该项目）在石头样本上进行了全面的抗压试验，对所提出的结构进行了数学分析．（6.3节将描述所需要的知识．）这些研究得出墩柱和经过加固的支撑结构很牢固，能承受穹顶的重量．在有记录的建筑历史上，这是首次在建筑物的设计中应用结构工程的方法．

施工得以继续．1790年教堂完工时，法国大革命爆发，之后不久圣日内维耶教堂成为先贤祠．后来砌筑墩柱产生了裂缝，迸发了新一轮论战．人们研究了这些裂缝，与应力试验引起的裂缝做比较，并进行了新的侧推力计算．结果又一次确定该建筑是合理的，问题出在施工质量上．墩柱的灰浆层厚度不同，使得穹顶主要由墩柱外部的石头贴面所支撑．这导致19世纪早期，墩柱被建得更粗了．接下来的百年里，这座建筑的功能从宗教转变成世俗．它现在作为先贤祠，纪念伟大的法国女性和男性，他们中有伏尔泰（哲学家、剧作家和评论家）、卢梭（哲学家和作

家）、维克多·雨果（小说家、诗人和剧作家）、埃米尔·左拉（小说家）、玛丽·居里（物理学家）以及路易斯·布莱尔（盲人教师）.

苏夫洛设计的结构很大程度依赖于铁的加固，这使砌筑结构超越了自身的天然局限性．约一个世纪后，人们开始使用钢筋混凝土，于是几乎没有什么不能建造了．结构工程的现代方法展示了苏夫洛及其同事不可能懂得的知识．砌筑体内增加强度的铁夹和铁杆能在砌筑体内产生集中应力，时间长了就会使其断裂．还有其他的长期效应，如缓慢的化学变化、底层土的改变以及热和风对砌筑结构的作用等，都是复杂的问题，其结果很难预料．目前先贤祠出现了一些变形问题．其中最重要的一处发生在4个大拱券内，每个拱券的跨距约30.5米，承载着被列柱廊的柱子环绕的鼓座的重量.

俄罗斯沙皇彼得大帝的领土包括了东欧北部和亚洲．首都城市圣彼得堡很快拥有了50万居民，成为欧洲大陆内排在伦敦、巴黎和君士坦丁堡（那时叫伊斯坦布尔）后的第四大城市．它的圣以撒俄罗斯东正教大教堂的情况正在恶化，重建这座献给其守护神的教堂成为罗曼诺夫王朝沙皇的重要事务．1812年，俄罗斯战胜拿破仑后，时机成熟了．新圣以撒大教堂应该既是辉煌的礼拜堂，又是强大的新国家及其首都的象征．拿破仑失败后，法国君主政体复辟，建筑师里卡尔·德·蒙费郎（1786—1858）被迫离开法国，到俄国碰运气．蒙费郎的建筑素描引起了沙皇的注意，他被深深触动，让这名没有经验的年轻建筑师主持这一项目．项目开始于1818年．那时在欧洲有一种ferromania（ferrum是拉丁语，意为“铁”）．铁的产量丰富，工程学也得到提高，因此以铁为骨架或被铁覆盖的大型建筑随处可见．在新教堂刚开始施工期间，圣彼得堡内建成了一座大型铸铁哥特式大厅，用来存放俄罗斯帝国军队总参谋部的档案．蒙费郎本人之前曾作为助手，为巴黎的一座商业大厦建造铁骨架穹顶．因此，蒙费郎为该教堂选择一座铸铁骨架支撑的穹顶在那时也不算太出人意料．他提出了三重壳设计，与莱恩的圣保罗大教堂穹顶极其相似．比较图6-2和图6-6，观察两种几何形状的相似之处和二者内部圆锥体所起到的核心作用．图6-7展示了圣以撒大教堂弯曲的铁骨架和穹顶支柱．其优点是它的重量约为2268吨，比圣保罗大教堂的穹顶要轻得多.

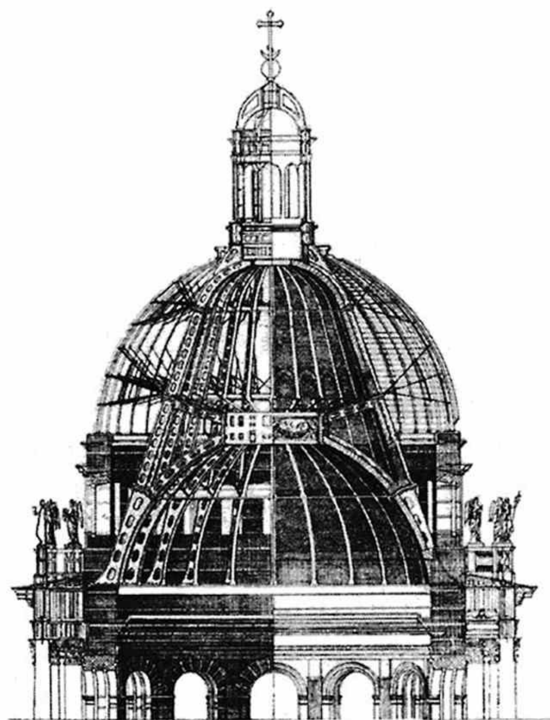


图**6-6**　圣以撒大教堂的穹顶截面图．选自里卡尔·德·蒙费朗的《圣以撒大教堂》（***Église cathédral de Saint Isaac***），巴黎，**1845**

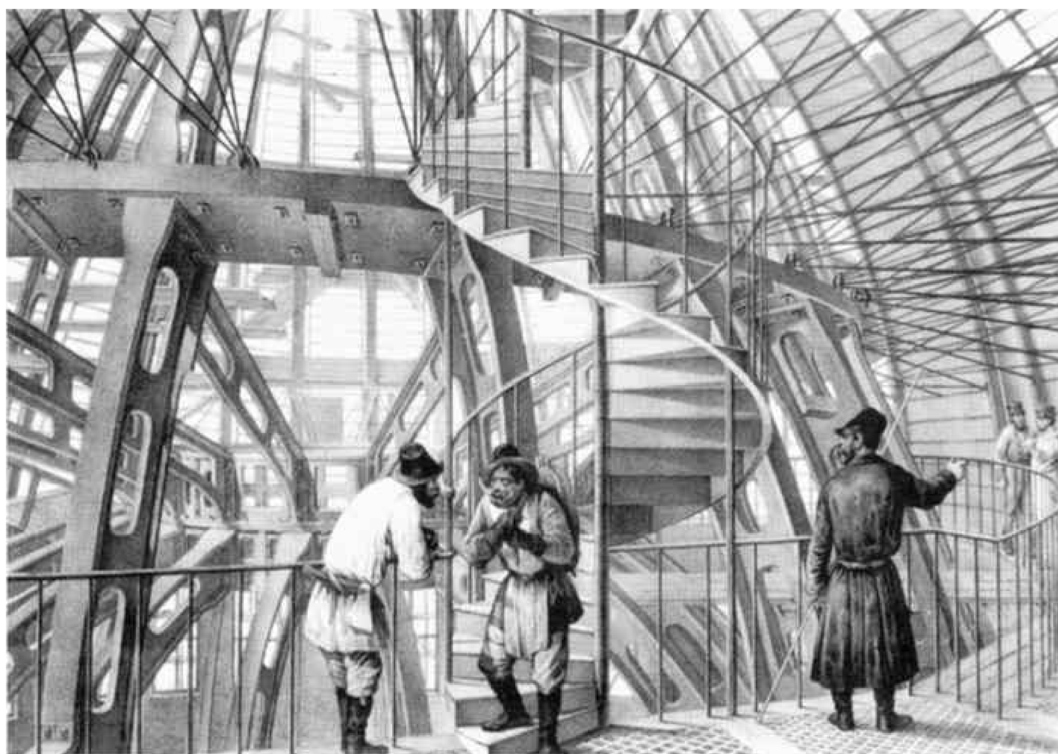


图**6-7**　圣以撒大教堂的内部结构．选自里卡尔·德·蒙费郎的《圣以撒大教堂》，巴黎，**1845**

圣以撒大教堂是世界上第四大有穹顶的教堂．它可以容纳14 000名信徒．它的金色大穹顶俯视着该城的天际线．圣以撒大教堂的外部以及它的山花和门廊以古典风格建造．华美的内部则是巴洛克外观，装饰着绘画、马赛克、檐壁、雕塑、大理石及次等宝石，非常奢华．圣以撒大教堂一直倍受赞扬和批评．一些历史学家赞扬它的杰出的建筑师，称该建筑为俄罗斯最伟大的古典作品．另外一些则关注缺点，批评它的庞大开支，称其为“伪劣铸铁建筑”．

1793年，乔治·华盛顿亲自为美国国会大厦安放奠基石．大厦于1828年完工，不过到1850年，它已经太小了，容纳不了日益增加的新加入州的议员．因此，参议院批准对它进行大幅扩建，其新侧厅是正面宽度的两倍多．他们认命建筑师托马斯·沃尔特（1804—1887）监督这项工程．侧厅的工作开始后不久就因一场火灾中断，火灾烧毁了建筑西部的旧国会图书馆，烧掉了大部分书，其中许多都是无可替代的．这次让人痛心的事件对沃尔特和国会产生了强烈影响．沃尔特决定用防火的铸铁建造新侧厅内的所有屋顶结构、装饰性天花板、镶板及镶边装饰．以前从未在重要的公共建筑中如此大规模地使用铸铁．铸铁的选择也使其能以低成本增加丰富的铸造花饰．

即使是政治家也很快就看出需要有一座更大的新穹顶，以符合这座扩建后的、拥有优秀设计的建筑所应具有的比例和平衡．在准备穹顶设计时，沃尔特先研究了圣彼得大教堂、圣保罗大教堂及巴黎先贤祠的穹顶．在之前短暂的旅欧期间，他亲眼看到了全部3种建筑．沃尔特选择莱恩的穹顶作为他的原始模型．他测量了圣保罗大教堂鼓座和列柱廊的直径，获得了列柱廊及其上方半球的垂直比例．与圣保罗大教堂不同，沃尔特直接在列柱廊上加盖了圆柱形阁楼．与圣保罗正方形的小窗户相比，它的细长的窗户更加有效地延长了列柱廊垂直上升的线条．沃尔特设计的另一个新特点是弯曲的镶板带，它将阁楼细长窗户之间的壁柱与其上方半球体的拱肋连接起来．比较图6-1(a)和图6-1(d)，可知，华盛顿国会大厦的穹顶更雅致．

在选择穹顶的建筑材料时，沃尔特转向了铸铁．几种因素促成了他的选择．他在国会大厦新侧厅里为了防火已大规模使用过铸铁．用铸铁比用砖石便宜得多．还有侧推力的问题．如果事先不大规模加固现有的底座直至它下面的地基，它就不可能吸收具有所需尺寸的砖石穹顶的水平侧

推力．而现有的国会大厦的中心部分及其敞开的圆柱形大厅内部并不允许这样做．而铸铁穹顶重量轻，能建在现有的鼓座上，与给罐子盖上盖子并无不同．况且还有圣以撒大教堂的先例．沃尔特画了一些建筑素描，描绘出它的穹顶及位于中心的铁圆锥体的布局．

最后设计的国会大厦穹顶的支撑结构既不是蒙费郎的圆锥体，也不是沃尔特设想的圆锥体，而是沃尔特的德国助手奥古斯特·舍恩博恩（1827—1902）提议并改进的一组弯曲的拱肋．如图6-8所示，它给出了沃尔特设计的圆锥体与舍恩博恩设计的拱肋之间的区别．舍恩博恩设计的拱肋向上成为开放的桁架，与鼓座合并为一个单独的结构单元．显然，作为桁架的拱肋和支撑穹顶外半球的短杆结构更合理．

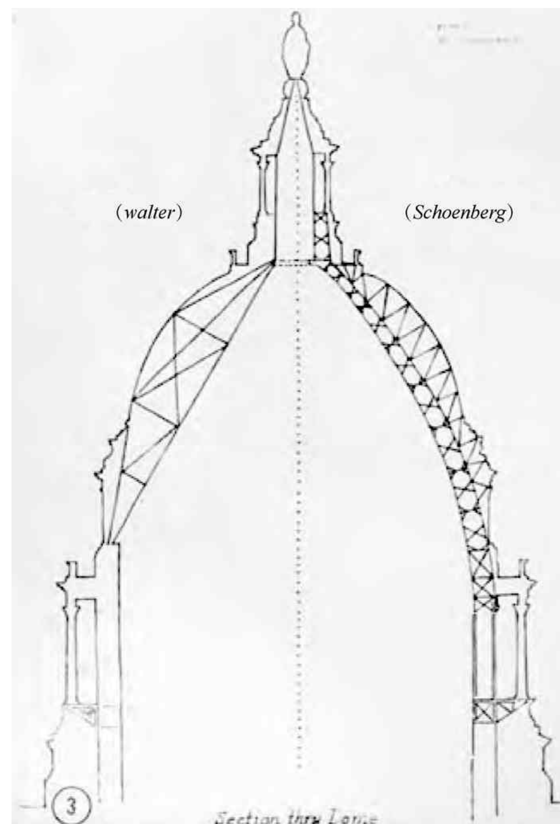


图**6-8**　国会大厦穹顶的原始设计及拱肋结构的最终设计．左侧是沃尔特的原始设计，右侧是舍恩博恩的最终设计．选自**T. Bannister**的《美国国会大厦的穹顶历史》（***The Genealogy of the Dome of the United States Capitol***），**1855**

穹顶在1856年开工．人们在圆形大厅上空搭建了一个临时屋顶，拆除了旧穹顶，又增加了约2268吨新砖和灰泥将鼓座建得更高（部分被替

代）．人们在中心竖起一个单独的以桁架为支撑的窄木塔，上带一个放起重机的平台．起重机立柱长24.4米，横梁长24.4米，人们用起重机以及驱动它的蒸汽发动机吊起了该结构的所有铁构件．一圈大型三角形支架被固定在鼓座的外侧．列柱廊的每根柱子都由两个这种支架所支撑，其高度为8.2米．图6-9(a)展示了一个支架、一根柱子及鼓座延伸部分的垂直支撑物．围绕列柱廊有36根柱子，其直径为37.8米．图6-9(b)展示了一个支架下方的铸铁配置．它是将鼓座向外延伸3米的间壁的基础结构的一部分．这个间壁和列柱廊的外部进一步增加了穹顶靠下部分所占的比例，平衡了新国会大厦经过扩建的侧厅正面．

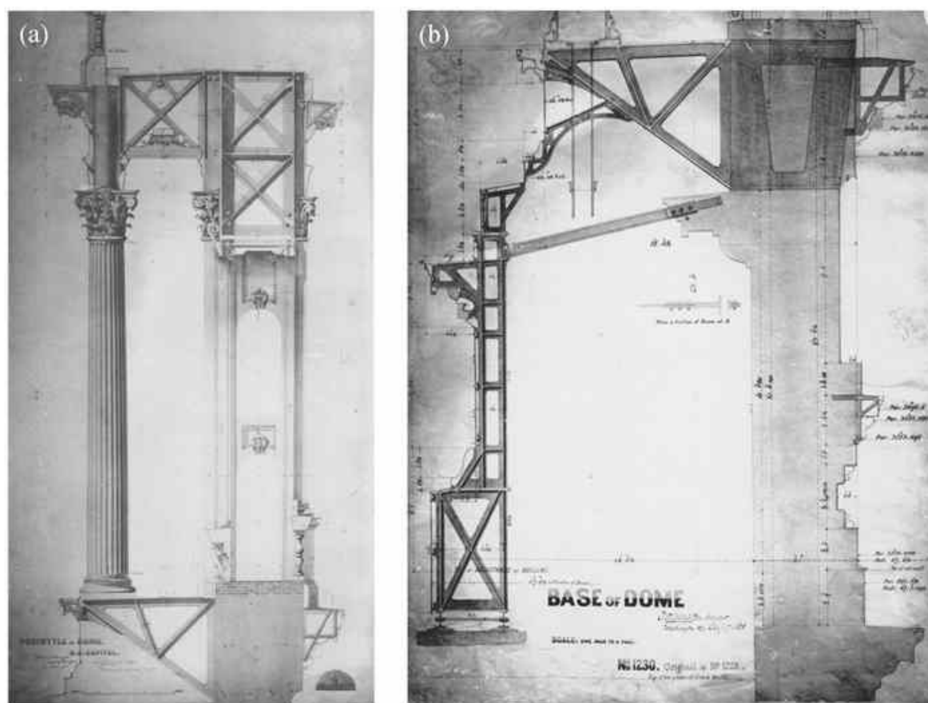


图**6-9**　**(a)**鼓座的纵向延伸及列柱廊的柱子；**(b)**鼓座顶部及其外侧的铸铁延伸．选自《格伦·布朗的美国国会大厦历史》（***Glenn Brown's History of the United States Capitol***），议院档案，**No. 108-240**．图**196**和图**197**

穹顶下部完工后，开始竖立舍恩博恩设计的36根拱肋．1861年，大部分工程都因内战暂停，国会大厦被暂时用作军营、医院和面包店．不过，1862年工程得以恢复．工人在不同的高度架设了水平桁架，将拱肋包围并连接起来．数组缆绳被仔细地调整过张力，以进一步保护拱肋．穹顶外壳的铸铁构件和支撑它们的杆被放置到位．靠近顶部，拱肋三根一组合并起来并向上延伸，用来支撑穹顶的采光亭．当青铜铸成的自由女神

像被吊到采光亭顶部后，穹顶的外部完成了．工程转入内部．带华丽的八边形镶板的铸铁内穹顶被固定到拱肋结构上．内部上方有一个直径为19.8米的圆孔．最后，球冠形状的顶盖被吊到圆孔的上方，透过圆孔能看到它．图6-10展示了这些在已建成的穹顶内部靠上位置处的部件．1866年，美国国会大厦的穹顶落成，其外部高度为87.8米（从东侧看，而非从矮得多的街道一侧），其铸铁结构重4082吨．（顶盖上向神圣的乔治·华盛顿致敬的湿壁画要在这之后很晚才完成．）

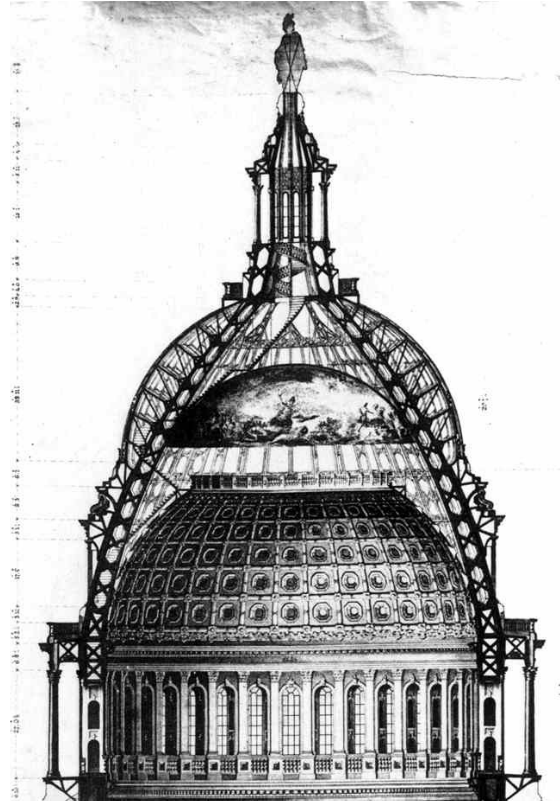


图**6-10**　拱肋、铸铁结构、内穹顶的顶部及顶盖．选自《格伦·布朗的美国国会大厦历史》（***Glenn Brown' s History of the United States Capitol***），议院档案，**No. 108-240**．图**186**细部

托马斯·沃尔特庄严的白色穹顶自此成为美国民主的闪亮象征．不过它也有批评者．他们注意到它的形式与建筑材料并不和谐，认为具有这样雅致的古典几何形状的穹顶应该完全由古典材料即砖石建造，不能使用铸铁．可是，更重要的是，建筑必须使用符合设计要求的材料．无论古典与否，它都必须用能充分吸收其负载的材料建成．在本文我们已经看到用砖石砌筑的．著名的大型穹顶十分艰难地承载其负载，而且还要经被铁链加固之后才行．关于这一点，国会大厦穹顶的情况如何？1933

年，一次详细的检查证明它的穹顶结构没有问题．20世纪90年代的检查发现穹顶内壳的镶板和装饰性表面上有裂缝、破损和涂漆剥落．但是，引入二维和三维计算机模型后的一次大的结构研究确信该穹顶依旧状态良好．

6.2 悬链与升穹顶

在莱恩完成他对圣彼得堡大教堂的设计前，巴黎就已建成一座三重壳的穹顶．中间穹顶应举起木框架以便支撑外部穹顶，应能通过内穹顶的圆孔看到中间穹顶内侧的装饰元素，这些观点并不新鲜．不过莱恩决定让中间穹顶的形状为圆锥体确实是史无前例的．在所有可能的形状中，为什么选圆锥体？

科学家罗伯特·胡克是莱恩圣保罗大教堂项目的同事．他应该起到了重要作用． 莱恩和胡克面临的主要难题是穹顶的稳定性，尤其是它要能支撑起将近907吨的大型采光亭．大约在圣彼得堡大教堂刚开始施工的时候，胡克就形成了至关重要的见解，即悬链与拱券和穹顶稳定性问题有关．他阐述了下面的原理：“像悬挂柔软的线那样，不过要把它倒过来，就会架起一个拱．”有了这种观点，胡克取出一条轻而柔软的链网，给它配置了一些重物．将该网固定，让它悬垂，由于链网内重力和应力的作用，在他面前出现了一个固定好的碗形．想象一下翻转后的形状，胡克就此得到了穹顶的模型．在这一想象的图像中，此时，网上的重物是加在穹顶上的负载．胡克认为这种几何图形在支撑给定负载时是理想的．

图6-11描绘了胡克在圣保罗大教堂穹顶设计中的想法．图6-11(a)中的两个斜向外的力拉起一条链的两端．底部的箭头代表重物，它模拟负载，尤其是采光亭的向下的推力．图6-11(b)中的形状是上图的倒置，且被认为是刚性的，代表负载的箭头这时位于顶部．斜线是以理想方式支撑这些负载的圆锥形穹顶模型的截面．这时底部的倾斜力指向内部，代表穹顶底座的推力．圆锥体墙壁比较陡，意味着负载产生的向下的力的水平分量较小．当然，这些力的确存在，它们都受到嵌在砖砌圆锥体不同高度处的4根铁链的限制．无疑，胡克对“柔软的线和刚性拱券”的敏锐分析使莱恩根据图6-2所描绘的圆锥形内壳，设计了圣保罗大教堂的穹顶．

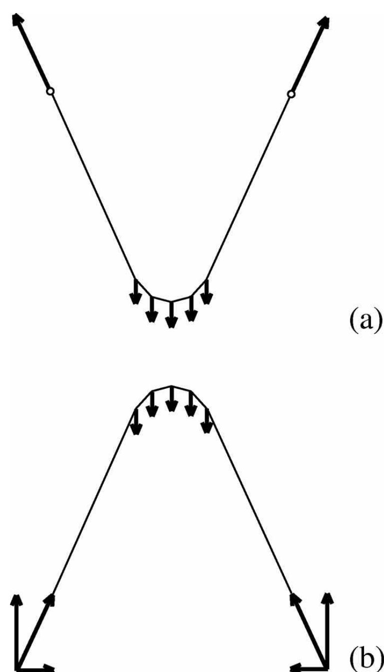


图**6-11**　胡克的悬链原理

回忆一下5.6节，圣彼得大教堂刚一完工，穹顶内的环向应力就使内壳产生严重的裂缝．在接下来的一个世纪里，裂缝进一步恶化，到18世纪中期，梵蒂冈内警钟长鸣．1742年到1743年间，教皇召集了几次委员会，委托建筑师、石匠大师和数学家评估穹顶的稳定性．此次评估出现了截然不同的一些观点．其中一种认为穹顶的坍塌迫在眉睫，该结构亟需大的修理．而另一种观点认为，裂缝并不致命，穹顶还是稳定的．为了解决这一问题，教皇认命帕多瓦著名的数学家和结构工程师（还是侯爵）乔万尼·波莱尼（1683—1755）来评估穹顶的情况．波莱尼是伦敦皇家学会的成员（他的成员资格与牛顿和莱恩相同），他深入分析了这些壳和裂缝的形式，得出了不会马上有毁坏危险的结论．

波莱尼的分析主要应用了胡克关于悬链形状与穹顶结构合理性间的联系的知识．波莱尼假设将穹顶分成50个相同的锥形切片．如图6-12所示．他将两个相对的切片配对成一个拱，将穹顶看成是25个这样的拱的组合，其中每个拱支撑采光亭重量的$\frac{1}{25}$．波莱尼使用图6-13展示的穹顶截面图，拿一根柔软的绳子并沿该绳加上32个重物，制作了一个拱及其所支撑负载的典型模型．每个重物都与相应的拱段和采光亭的估计重量成正比．图6-13的下半部分绘出了这根绳子．圆圈代表被小心放置的重物，圆圈越大代表重物越重．越靠下圆圈的尺寸越小，对应的拱越细，

底部的大圆与采光亭的负载相对应．波莱尼观察并仔细研究了他的图形后确信，加载过的绳子倒过来后，形状与他的穹顶示意图的内外截面相符．这是他的模型的决定性特点，它说服波莱尼穹顶是安全的．（仔细研究该图，还表明倒过来且不加负载的链子其局部会落在内截面以下．）他建议，考虑到以后情形会进一步恶化，为保证圣彼得大教堂穹顶的安全，除了原来的3条外，还可以给它再箍上5条铁链．

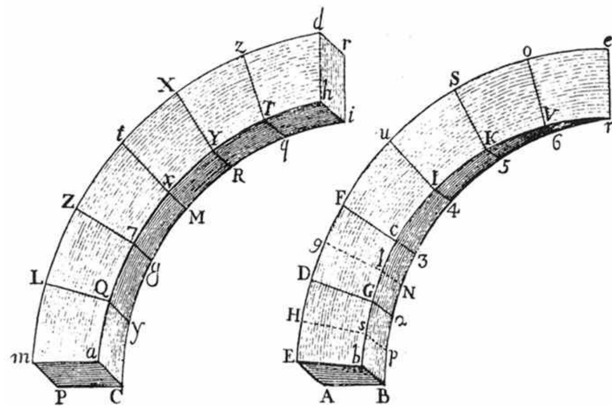


图**6-12**　乔万尼·波莱尼的图**D**，《梵蒂冈教堂大穹顶的损害及其修复的全面回忆，共**5**卷》，出版地为帕多瓦，**1748**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

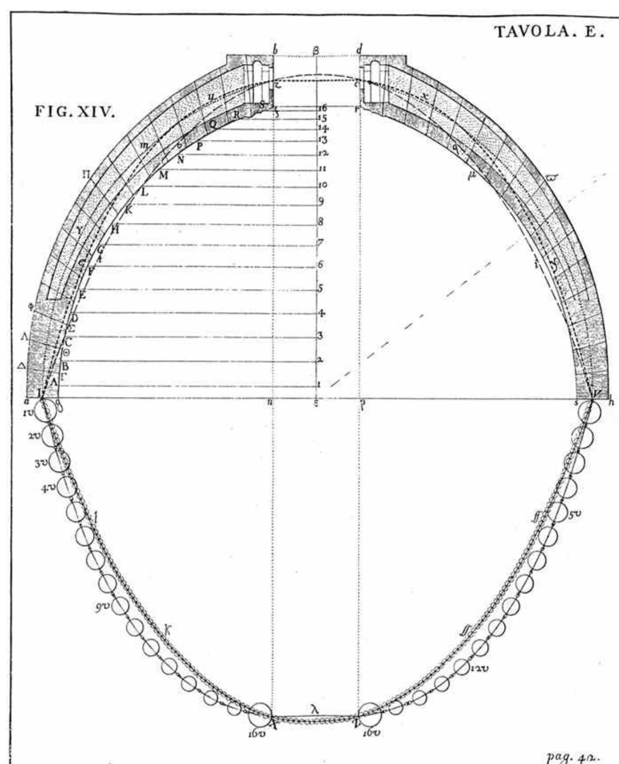


图**6-13**　乔万尼·波莱尼的图**E**，《梵蒂冈教堂大穹顶的损害及其修复的全面回忆，共**5**卷》，出版地为帕多瓦，**1748**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

穹顶的修复立即启动．穹顶内外均搭起了复杂的脚手架，裂缝得到了修补．构成铁链每一链条的铁条都经过锻造和测试．5条铁链需要12多吨铁，每个链条都是弯曲的高质量铁条，长约5.5米，两端有孔眼．链条被嵌进砌筑体的凹槽里．图6-14是对链条的研究．它展示了被砸进孔眼中用来装配并绷紧链子的铁销．完工后的整条链子被勒进砌筑体内．图5-37中标有*A*、*B*、*C*、*D*和*E*的虚线给出了这5条铁链环绕穹顶及其16根垂直拱肋的位置．穹顶的修复工作在1748年完成．随着修复工作的完成，教皇任期内的声望也得以恢复．心存感激的教皇奖给波莱尼一个金盒、金质和银质奖章以及一笔退休金．荣誉和礼物来得很快，但直到两个多世纪后，才能验证波莱尼用加载过的绳子分析圣彼得大教堂是正确的．

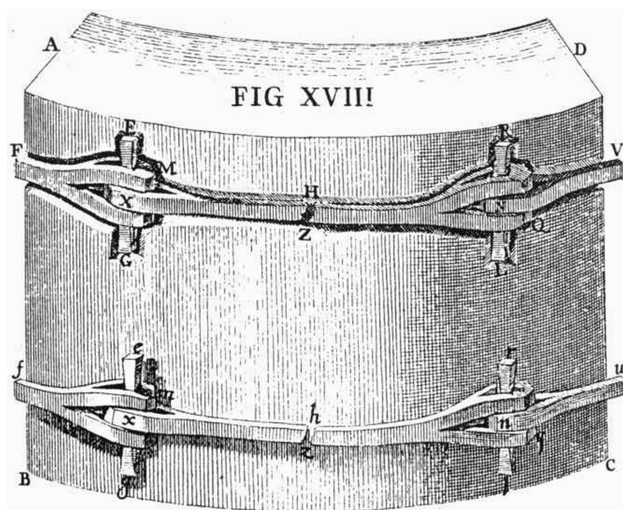


图**6-14**　乔万尼·波莱尼的图**F**，《梵蒂冈教堂大穹顶的损害及其修复的全面回忆，共**5**卷》，出版地为帕多瓦，**1748**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

验证的历史从法国科学家及耶稣会牧师皮埃尔·伐里农（1654—1722）的研究开始．《新力学：静力学》（*New Mechanics or Statics*）一书在1725年出版，其中提到一种确定加载过的悬链线形状的图解法．伐里农的构造需要密切关注，不过它涉及的知识几乎不超出第2章已讨论过的向量的基本性质．

考虑一根绳子、线或链子，假设它非常柔软且拉伸时并不变长．图6-15展示了一根两端固定在A和B点的绳子，A点受到力R_1，B点受到力 R_2 的作用．点A和B确定的线段AB水平．重物 W_1、 W_2和 W_3 被加在绳子的P_1、 P_2和 P_3点，其距离记作 d_1、 d_2、 d_3和 d_4．（可以加更多的重物，但3个足以说明以下内容．）毋庸置疑，与任一附加的重量相比，绳子的重量可以忽略不计．允许重物自由悬挂，假设绳子和重物都达到平衡，没有移动．给定单位长度和单位力，长度为x的向量代表大小为x的力．可以用同一（或不同）单位长度按比例画出上述配置．接下来的重点是假设已知力 R_{21} 和 R_2，重物 W_1、 W_2和 W_3以及距离 d_1、 d_2、 d_3和 d_4，说明如何用它们确定绳子的准确形状从而得到其长度．

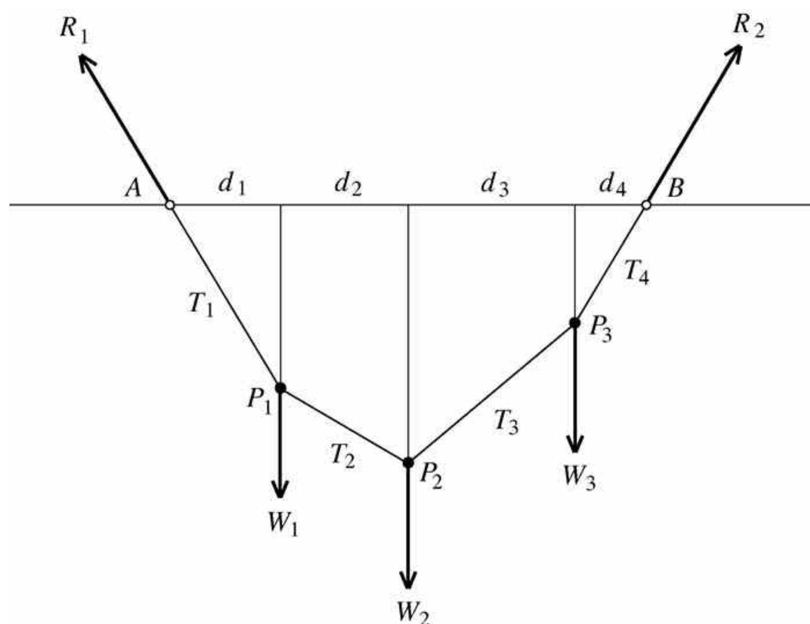


图　**6-15**

图6-15分别用 T_1、 T_2、 T_3和 T_4 表示4段绳子的拉力．绳子在一个点处的拉力大小即为该绳在这个点的张力．因为没有移动，每段绳子内部所有点的张力相等．具体而言，第一段绳子在A点的向下的拉力大小等于该段绳子在 P_1 点的向上的拉力．其他3段绳子也与此类似．但是一段绳子内的张力可能与另一段不同．

怎样用已知的条件确定绳子的路线？准确地说，该路线到底是什么？因为系统处于平衡状态，第一段绳子在A点正好沿与 R_1 相反的方向向下拉，其张力的大小等于 R_1 的值．因此第一段绳子从A点朝图6-16(a)所示的方向拉伸，直到距离 d_1 所确定的点 P_1 ．为了使 P_1 点平衡，第二段绳子在 P_1 点的拉力必须克服向上拉的 T_1 和向下拉的 W_1 的合力．这样可知 T_2 由图6-16(b)中的受力分析图确定．第二段绳子从 P_1 沿 T_2 的方向拉伸直到距离 d_2 所确定的点 P_2 ．为了在 P_2 点达到平衡，第三段绳子在 P_2 点的拉力需要与向上拉的 T_2 和向下拉的 W_2 的合力平衡．因此 T_3 由图6-16(c)中的受力分析图确定．图6-17(a)表明第三段绳子从点 P_2 沿 T_3 的方向拉伸直到距离 d_3 所确定的点 P_3 ．连接点 P_3 和B，则完成了这根绳子的路线．图6-17(b)的受力分析图表明 T_3 和 W_3 的合力大小与 R_2 相等，方向与其相反．这与系统在B点的平衡条件一致．

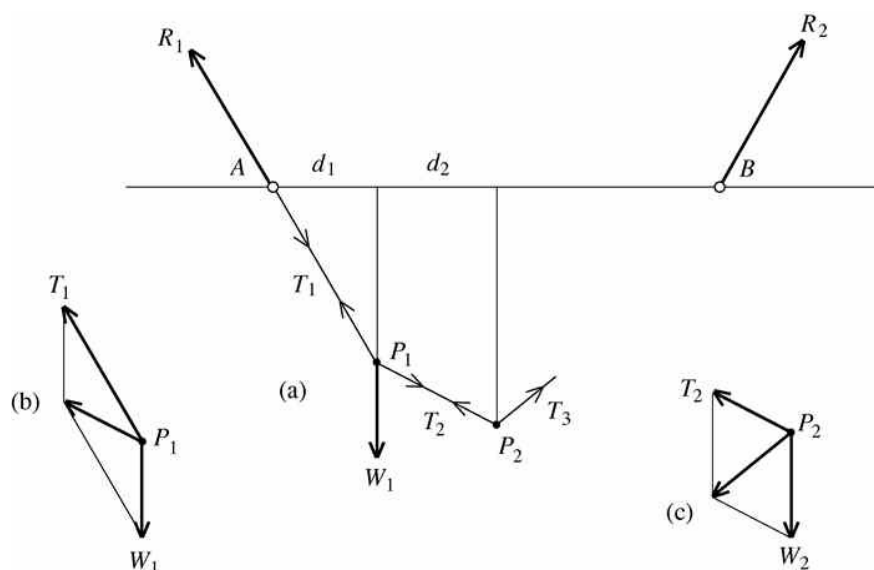


图　**6-16**

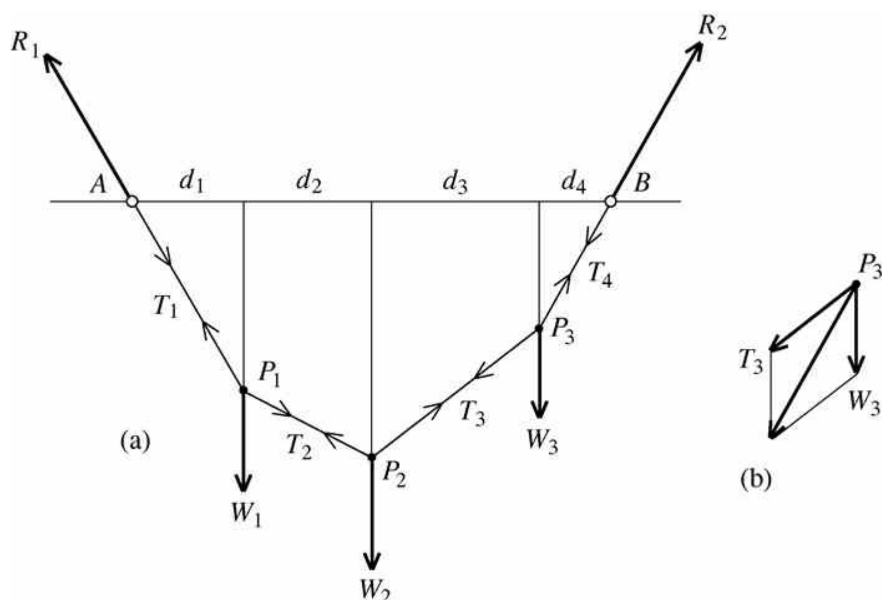


图　**6-17**

正如上面所说的，力 R_1 与 R_2，重物 W_1、 W_2 和 W_3，以及距离 d_1、d_2、 d_3 和 d_4 精确地确定了绳子的路线．多边形 $AP_1P_2P_3B$ 为绳子对力 R_1、 R_2， W_1、 W_1 和 W_3 的索多边形．（拉丁语中，funicular意为“索”．）总之，索多边形是绳子在指定模式的力作用下所呈现的形状．

可以将基本信息放到一个图中，快速确定4段绳子内的张力及其方向．图6-18(a)和图6-18(b)展示了 R_1 的水平和垂直分量 H_1 和 V_1，以及 R_2 的水平和垂直分量 H_2 和 V_2．因为系统处于平衡状态，向下的总拉力等于向上的总拉力，可知向量 $W_1 + W_2 + W_3$ 和 $V_1 + V_2$ 的大小相等．研究图6-17(a)可得到以下的知识．A点处于平衡意味着 H_1 的大小等于 T_1 的水平分量的大小．P_1 点处于平衡意味着 T_1 和 T_2 的水平分量大小相等．点 P_2 和 P_3 依此类推．最后，B点处于平衡意味着 H_2 的大小等于 T_4 的水平分量的大小．结合这些信息，可知 H_1 和 H_2 大小相等．

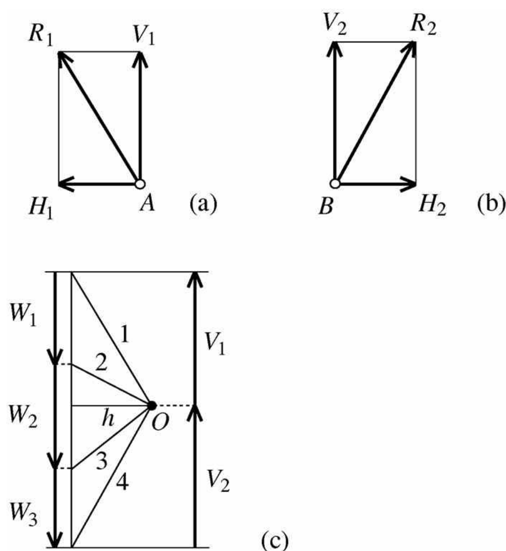


图　**6-18**

按图6-18(c)所示，将向量集合 W_1、 W_2、 W_3 和 V_1、 V_2 首尾相接．可以按如下方法确定图6-18(c)内的三角形配置．它的垂直底边由图示的重力向量排列而成．垂直底边的长度等于向量和 $W_1 + W_2 + W_3$ 的大小，也即向量和 $V_1 + V_2$ 的大小．三角形水平方向的高由图示的线段确定．它的位置由向量 V_2 的终点确定，长度等于向量 H_1 和 H_2 的共同大小h，点O是其右端点．按图排列线段1、2、3和4．依次比较图6-18(a)与线段1的放置方式、图6-16(b)与线段2的放置方式、图6-16(c)与线段3的放置方式以及图6-17(b)与线段4的放置方式，我们可知线段1、2、3和4分别用长度确定了向量 T_1、 T_2、 T_3和 T_4 的大小，用方向确定了图6-17(a)中4段绳子的位置．称图6-18(c)为给定模式的力的力多边形．假设距离 d_1、 d_2、 d_3和 d_4 已知，可以很快由力多边形中的线段1、2、3和4确定图6-

17(a)中绳子的形状．

保持负载 W_1、 W_2、 W_3 及距离 d_1、 d_2、 d_3和 d_4 不变．令力 R_1 和 R_2 的垂直分量 V_1 和 V_2 保持不变，使且仅使 R_1 和 R_2 的水平分量的共同大小h变化．图6-19(a)展示了h增加后的力多边形．它可以通过水平拉长图6-18(c)中的力多边形得到．新的力多边形带来新的绳子段分布．新形状可以由多边形迅速推出，如图6-19(b)所示．毋庸置疑，图6-19内的绳子形状比图6-17(a)中的要扁一些．（凭经验你也应该知道如果绳子的一端固定，拉另外一端，如果拉力的水平分量较大，则它下垂的程度会小一些．）

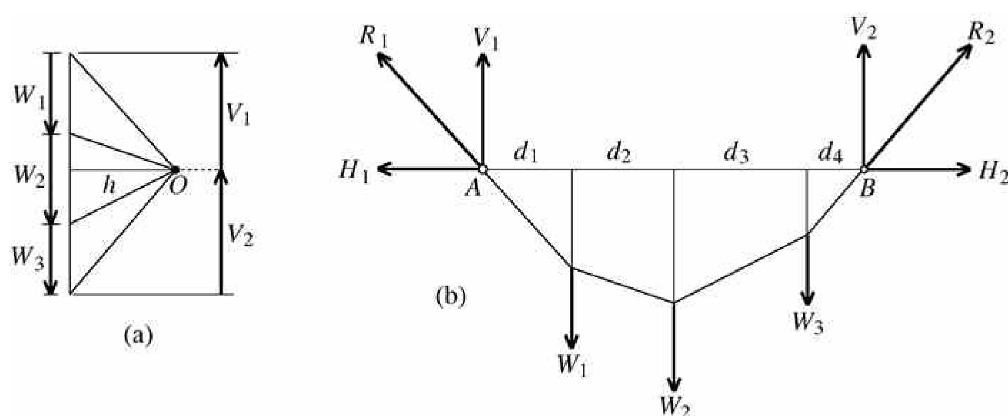


图　**6-19**

图6-20展示了4个力多边形．图6-20(a)和图6-20(b)的力多边形分别对应图6-17(a)和图6-19(b)的绳子配置．图6-20(c)的力多边形的h较大，图6-20(d)的力多边形h较小．每种情况中三角形内的斜线展示了绳子段是如何升起或落下的．

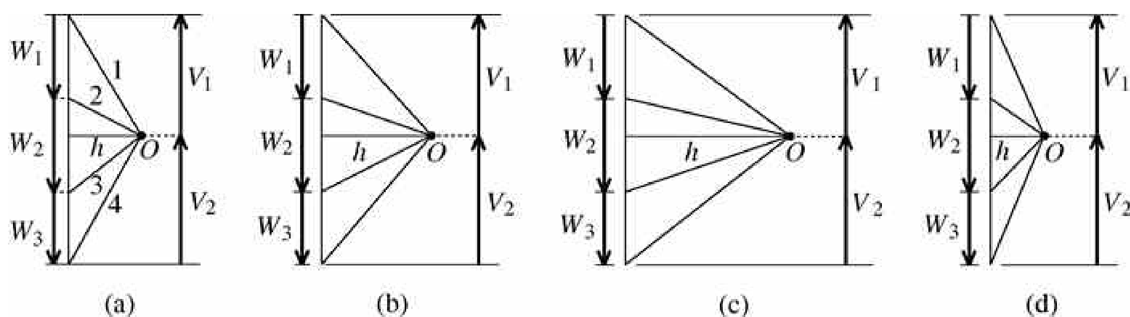


图　**6-20**

上面对悬链所做的分析也适用于隆起的拱的抽象模型．将图6-17(a)向上翻转．负载 W_1、 W_2、 W_3 及它们之间的距离保持不变．力 R_1 和 R_2 的垂直分量 V_1 和 V_2 也保持不变，但其水平分量 H_1 和 H_2 的方向与原来相反．用细的刚性杆代替4段绳子，结果如图6-21(a)所示．用铰链将4根杆在彼此相交的地方（以及A和B点）进行连接．在图6-17(a)中，4段绳子上的力是沿绳子段的张力．在图6-21(a)中，它们是沿杆的挤压力．把图6-18(c)的力多边形翻转，得到图6-21(b)中的力多边形．该力多边形给出了4根杆各自的挤压力的大小及方向．图6-17(a)的绳系统与力处于稳定的平衡状态．拉或推一个重物或绳子会使其变形，但压力或推力停止后，最终仍会回到原始位置．图6-21(a)中的杆系统和力也是平衡的，但它并不稳定．如果受到推力或拉力的作用，杆会绕铰链转动，系统会崩塌．在真正的拱券中，拱石（回想一下，它指的是拱券中的楔形石）的厚度阻止了这种转动，从而获得稳定．

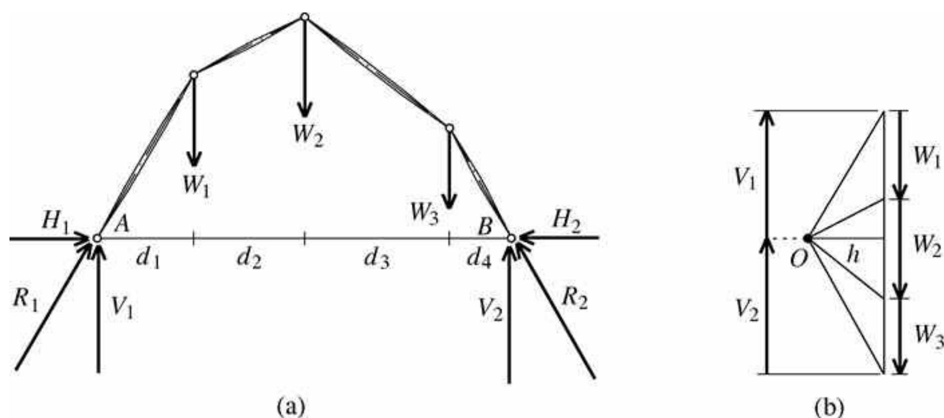


图　**6-21**

图6-22展示了负载 $W_1, W_2,\ldots$作用下的一个拱券．负载包括拱石的重量．设A和B是位于拱券底部两个最下面的拱石边缘上的点．两个力 V_1 和 V_2 是作用在A点和B点、在底部支撑拱券的力的垂直分量．拱券的稳定需要 $W_1 + W_2 + \ldots = V_1 + V_2$．令 H_1 和 H_2 为作用在A和B点的水平力，它们大小相等，方向均指向内侧．V_1 、 H_1 以及 V_2、 H_2 的向量和分别是在A点和B点支撑拱券的力．在示意图中运用这些信息，如前文图6-21(b)所示，可得到力多边形．这样就产生了以AB为底的索多边形，如图6-22所示．

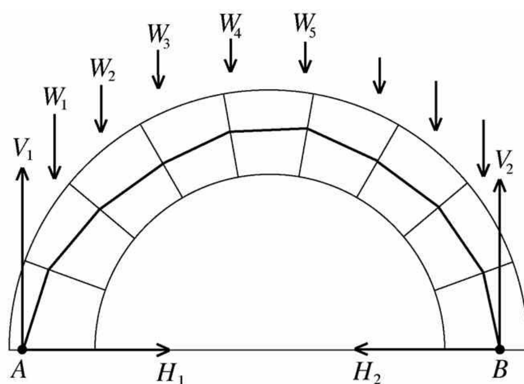


图　**6-22**

在波莱尼调查圣彼得大教堂穹顶稳定性之前，伐里农的工作成果就已出版，波莱尼对它一定已经非常熟悉了．尽管它的确给出了拱券的定量模型，却并没有证明波莱尼对加载过的绳子的分析是正确的．要做这一证明，我们需要一路快速飞奔到1966年，雅克·海曼（他后来成为剑桥大学工程系的教授和系主任）提出了一种深刻的见解． 海曼假设用来建造拱券的砖石在耐挤压方面不受限制，它的抗拉强度为0，拱券不会发生滑动损坏．事实也是这样，砖石能经受大的挤压而不怎么能抗拉伸．而且拱券受到挤压会提高其拱石间的凝聚力并增加滑动损坏的阻力．（图6-29(b)演示了滑动损坏．图6-29(a)绘出了更常见的铰合损坏．）因此，3种假设均与砖石拱券的性质一致．作出假设后，海曼建立了安全定理。

安全定理　设拱券受到负载 W_1，W_2，…的作用，它们与其底部支撑力的垂直分量 V_1 和 V_2 相平衡．假设拱券的砖石（i）在耐挤压方面不受限制，（ii）抗拉强度为0且（iii）拱券不会发生滑动损坏，若至少存在一个索多边形（建立在拱券的给定负载的基础上）完全落在该拱券的内外边界之间，则该拱券安全．

让我们回到图6-13中波莱尼的图形．根据圆圈和悬链的分布，建立截面图所代表的拱券构件的重量模型．将该悬链翻转（波莱尼用虚曲线表示），得到落在截面图边界内的拱券的索多边形．应用安全定理，可知该拱券安全．这样波莱尼的25个拱券都是安全的，因此穹顶安全．波莱尼得出这一结论的200多年后，海曼用理论证明了它对圣彼得大教堂穹顶的研究是正确的．（顺便提一下，该定理的证明远远超出本书的范围，也超出了波莱尼的理解程度．）安全定理让人大吃一惊．索多边形问题必须根据拱券所受到的负载推出，但它可能根本不能反映砌筑拱

券内部力的实际作用方式．因此波莱尼将加载过的绳子翻转过来的路线可能与该拱券的侧推力线（一条理论线，代表通过砖石和灰泥起作用的力的合向量的路径）几乎没有什么关系．

尽管海曼的安全定理令人吃惊，尽管它对砖石拱券行为提出了深刻的见解，它仍然只是一种理想状态．毕竟，砖石尚具一些抗拉强度，其抗挤压能力也有限．而且，正如图2-61的拱券所演示的，滑动损坏也确实发生过．事实上，对拱券和穹顶（甚至任何建筑结构）的深入研究均需要考虑材料的强度及各构件之间的相关静态性能．

6.3 分析结构：静力学和材料

静力学是结构工程的一个专业，研究处于静态平衡的物理系统．作用在这样的系统及其内部的力处于平衡状态．它的任何构件相对于其他构件都不发生移动．（在希腊语中，statikos意为“停滞的”或“使停止”．）材料强度方面的研究分析负载作用下的建筑材料、结构构件中的应力以及它们对损坏的反应和故障敏感性．

在4.1节中，我们提到过数学天才阿基米德（公元前285年—公元前212年）．在此处，我们将再次提起他，这次是作为静力学领域的始祖．在4.2节我们注意到，佛兰德的数学家西蒙·斯泰芬（1548—1620）促进了十进制数字系统在欧洲的使用．事实 上，他还是最早用向量表示力并得出力的平行四边形法则的人之一．伽利略·加里雷（1564—1642）通过把加速度向量分解成分量来分析运动，研究材料的强度并思考结构稳定性方面的问题．50年之后，艾萨克·牛顿（1642—1727）阐述了力和运动的基本定律并将其用于分析静力学及动力学（他对物体在太阳系中的运动的权威解释即属于该领域）问题．第2章已经使用了牛顿定律的基础应用．结构建筑第一原则是力=质量×加速度的直接结果，它的推论就是作用在一个静止质点上的非零的力将使该质点移动．图2-19(a)展示了梁柱结构的稳定性，是所有的作用力都有一个大小相等方向相反的反作用力的一个例证．

让我们看一下研究静力学和材料强度所需的基本物理概念．考虑一个实物，该物体的重力只是施加在它身上的地球引力的大小．物体的重力随其所处的位置而变化．物体在海平面时，其重力是一个值；在珠穆朗玛峰山顶时，是另一个值；当它在月球上，其值更是大不相同．相反，质量的概念更为基本．物体的质量m由牛顿方程 $F = mg$ 确定，其中F为该物体的重力，g为重力加速度．（在地球表面上， $g \approx 32$ 英尺/平方秒（9.8米/平方秒，即9.8m/s2），单位为英尺和秒．）常数g及重力F随物体位置的变化而变化．不管物体在什么位置，质量m的值则保持不变．但对给定的任何位置，g值固定不变，质量和重力成正比．

在分析物体受到的作用力时，一般可以假设该力作用于物体的一个点，即质心上．这个重要的概念不仅仅简化了这类分析，还使之成为可能．我们规定物体的质心可以通过用绳子悬挂进行试验的方法得到．对一维或二维物体而言，质心是物体上的C点，它满足如果用绳子系住C

点后悬挂，则该物体处于平衡状态．如图6-23(a)和图6-23(b)所示．为了确定三维物体的质心，把两根绳子系在其表面上的两个不同的点进行悬挂．物体与两根绳子所确定的垂直平面的交面，如图6-23(c)所示．在物体表面上选择不在该平面内的一点P，用系在P点的绳子悬挂该物体．物体的质心就是绳子延长线与之前所确定平面的交点C，如图6-23(d)所示．如果物体完全由同一种材料制成，则该物体的质心就是它的形心．

力能对物体产生旋转效应．例如，考虑奥林匹克跳水运动员站在跳水台悬空的一端上，他的重力会在平台与垂直支撑墙的接触面上产生旋转效应．支点和杠杆告诉我们怎样量化这类旋转效应．杠杆是一根刚性细杆（如图6-24所示）．有力作用其上时，杠杆既不会弯曲，也不会折断．支点是杠杆绕其自由转动且不存在滑动、摩擦和阻力的固定点．假设大小为f 的力垂直作用在杠杆上距离支点为d 的一点．我们将看到可以用乘积 $f×d$ 来测量力绕支点的转动能力．假设第二个力大小为F，垂直作用在杠杆另一端距离支点D的一点上．注意这两个力相互对抗．第一个力试图让杠杆以逆时针方向转动，第二个力则试图让其以顺时针方向转动．阿基米德的杠杆定律告诉我们如果 fd 和 FD 相等，杠杆就不会转动，系统处于平衡状态．（当然，此时杠杆上不存在其他力，如重力．）

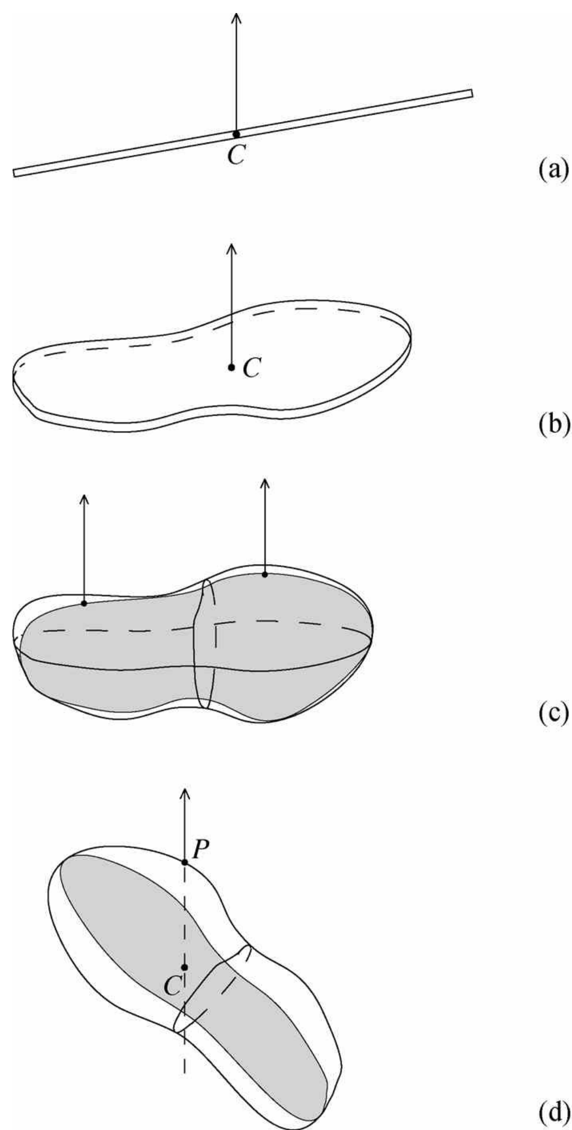


图　**6-23**

考虑与力f在支点同一侧的两个力 f_1 和 f_2 各自独立垂直作用在杠杆上，它们到支点的距离分别为 d_1 和 d_2，如图6-25所示．如果 $f_1d_1 = FD$ 且 $f_2d_2 = FD$，则根据阿基米德定律，这两个力都使系统平衡．可知如果恰好有

$$f_1d_1 = f_2d_2$$

则力 f_1 和 f_2 影响杠杆绕支点转动的能力相等．

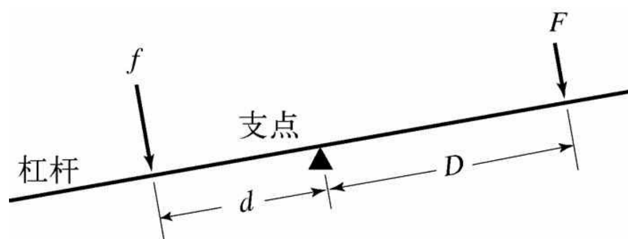


图 **6-24**

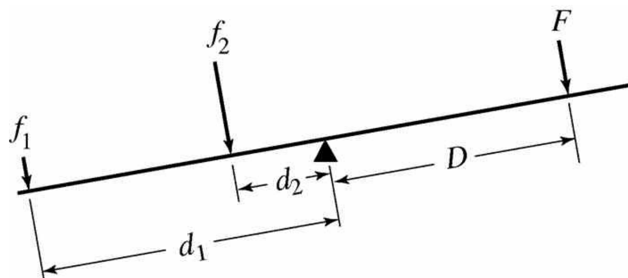


图 **6-25**

推门能够让我们直观感受以上讨论的内容．例如，如果你沿与门垂直的方向推门，所用的力为5磅，到铰链所在垂线的距离为3英尺，则其旋转效应等于 5×3 = 15 (磅-英尺)[1]．如果你用同样的力在距离该线2英寸，即$\frac{1}{6}$英尺处推门，则旋转效应为$5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$(磅-英尺)，比之前的$\frac{1}{15}$还小．这就是为何在靠近铰链处比靠近把手处关门要用更大的力．

1 磅-英尺为力矩的英美制计量单位，其国际标准单位是牛顿-米，1磅-英尺＝1.365牛顿-米。——译者注

目前为止，我们仅考虑了垂直作用于杠杆的力．现在我们将考虑大小为F的力以θ角作用到固定于A点的刚性杆上．如图6-26所示，力作用在距离A点l单位处．将力按垂直于杆及沿杆方向分解成两个分量．我们从2.4节学习到，这两个分量的大小分别为 $F\sin\theta$ 和 $F\cos\theta$．垂直分量产生绕A的旋转效应$(F\sin\theta)l$．分量 $F\cos\theta$ 则使杆受挤压或拉伸（本图中的情况是受到挤压），但它不能使其转动．观察一下图6-26，得到 $d = l\sin\theta$．因此$(F\sin\theta)l$等于 $F\times d$．因此，如果大小为F的力作用于一个结构，则它使其绕结构中一点A旋转的能力等于 $F\times d$，其中d为从A到力的作用线的垂直距离．$F\times d$的值称为绕A点的力矩．正是曾分析过负载作用下的绳子的皮埃尔·伐里农发现，力矩 $(F\sin\theta)l$ 与 $F\times d$ 相等．

注意一个重要的事实（阿基米德在计算面积和体积时已巧妙地使用过该事实）：要计算物体重力绕一点所产生的力矩，可以假设整个物体的重力位于质心处.

鉴于上述讨论，我们现在为第2章提出的第一原则增加一条结构建筑的第二原则．即一个结构要稳定，对该结构上的每一点，其合力矩必须为零．如果不为零，结构会绕该点转动．正如第一原则中的情况，必须考虑所有的力，包括内部作用力、挤压力和张力.

法国物理学家及军事工程处的工程师查尔斯·奥古斯丁·库仑（1736—1807） 在18世纪后半叶调查了建筑材料的强度和基础结构的静力学．如果说阿基米德是结构工程的始祖，那么库仑则是这门学科之父．他的许多重要研究都包含在1773年出版的《论静力学问题》（*Essay on Problems of Statics*）中.

库仑在《论静力学问题》中首先叙述了测试材料的方式．下面是他所做的基本工作．取一根某种材料制成的梁，其横截面面积为A，将它牢牢地水平固定好．沿该梁的轴线施加水平力T，如图6-27所示．增加这个拉力的大小，直到梁折断．眼看就要使其折断的T的大小就是这种材料梁的最大张应力．库仑发现它等于 $\tau\times4$，其中τ是常数，其值视具体材料而定．接着他在梁的固定点施加垂直力S，然后增加这一剪切力直到这根梁折断．在就要折断前S的大小就是这种材料梁的最大剪应力．和之前的情况一样，库仑发现它等于 $\sigma\times4$，其中σ是常数，其值视材料而定．库仑测试表明一种在波尔多附近发现的岩石，$\tau = 215$ 磅每平方英寸，$\sigma = 220$磅每平方英寸．他测得普罗旺斯出产的优质砖的τ值在280到300磅每平方英寸之间．对一些用灰泥粘合的砌筑材料，τ值为50磅每平方英寸，但根据所用灰泥的质量，其值能变化2~3倍.

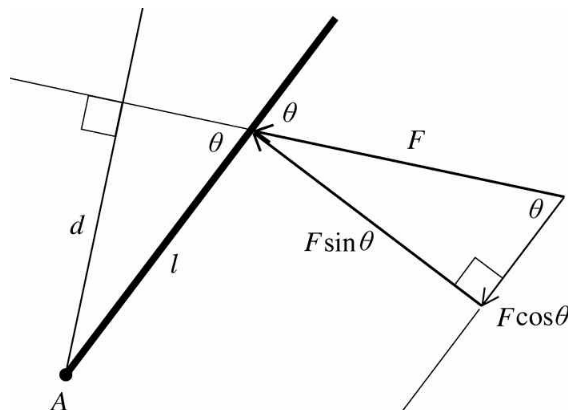


图**6-26**　伐里农判据

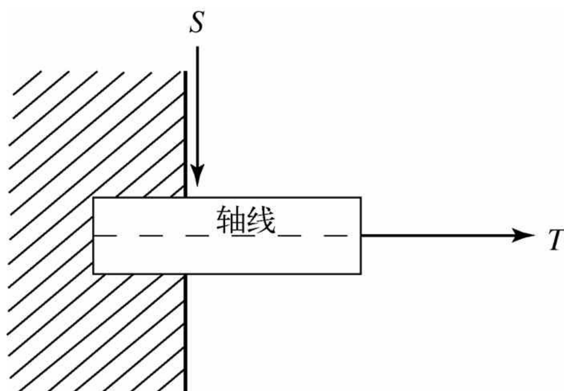


图　**6-27**

库仑还考虑了摩擦力．图6-28展示了沿干燥平面推一个方块，力的大小刚能使这个方块移动．因此，该力的大小实际上等于与它方向相反的摩擦力的大小F．库仑观察到F只与方块的重力N有关，与方块底面的面积无关，即 $F = \mu \times N$，其中μ为常数．称这个常数为静摩擦系数，它与平面和方块的表面性质有关．

人们观察到一段时间后砌筑拱券主要存在两种损坏：铰合损坏和滑动损坏，如图6-29所示．图6-29(a)展示的铰链损坏更常见．这类裂缝是由铰链打开处的力矩不平衡所致．过大的剪切力能导致图6-29(b)展示的那种滑动损坏．

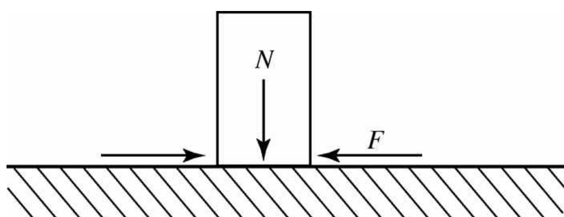


图　**6-28**

库仑对砌筑拱券稳定性的分析考虑了两种损坏．如图6-30所示，在研究时，他先用$ABED$代表拱券的一半．（该拱券在图中是圆形，但并不需要做这种假设．）点A是其最高点，截面AB是垂直面，ED是水平底座．点O是过AB的垂线与过ED的水平线的交点．用H表示AB处的水平侧推力．对O点的角α，有 $0 \le \alpha \le 90°$，ab是α所确定的拱券横截面．设 A_α 为拱券在ab处的横截面面积， W_α 为拱券在$ABba$段的重力．点C为该段的

质心．砌筑材料沿ab的剪切和张力常数以及静摩擦系数可能与ab的位置，也就是α角有关．我们分别将其表示为 σ_α、 τ_α 和 μ_α .

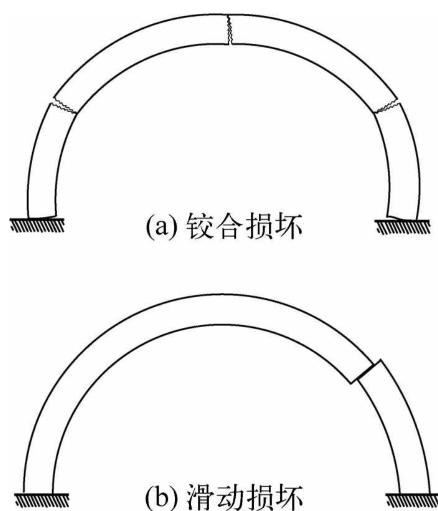


图 **6-29**

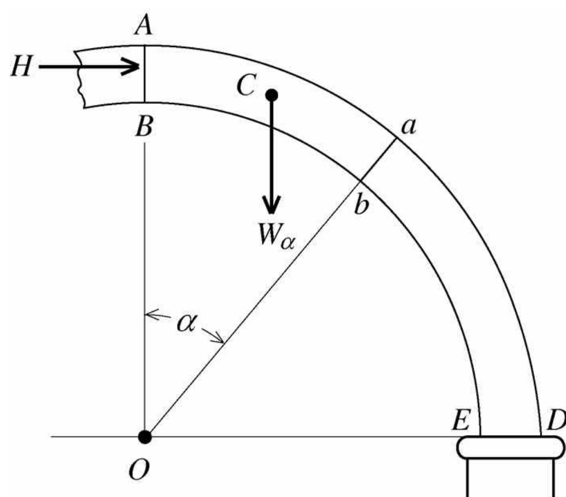


图 **6-30**

库仑假设拱券的$ABba$段是坚固的，这样很可能只沿ab发生折断．他的分析应用了2.4节所提出的向量的基本性质．具体而言，他依靠图6-31中示意图所包含的知识．这些图表明H和 W_α 沿横截面ab的分量分别为 $H\sin\alpha$ 和 $W_\alpha\cos\alpha$ ，而垂直于横截面ab的分量分别为 $H\cos\alpha$ 和 $W_\alpha\sin\alpha$.从图中还可以得知H和 W_α 沿横截面ab的合力为

$$W_\alpha\cos\alpha - H\sin\alpha$$

且H和 W_α 垂直于横截面ab的合力为

$$H\cos\alpha + W_\alpha\sin\alpha$$

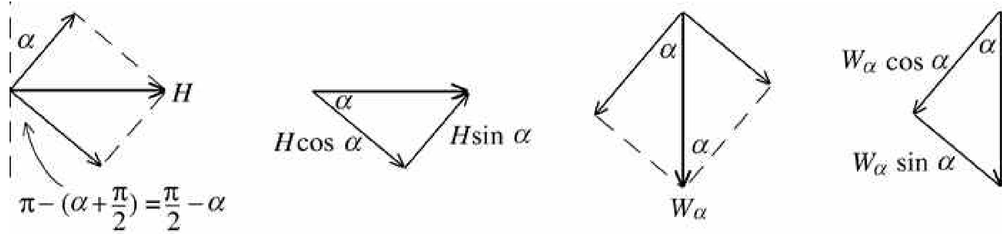


图　**6-31**

防止滑动损坏　首先假设 $W_\alpha\cos\alpha \geq H\sin\alpha$（或 $\frac{W_\alpha}{H} \geqslant \tan\alpha$ ）．比较图6-31的两个力三角形可得H和 W_α 共同在$ABba$上沿横截面ab产生向下的力，其大小为 $W_\alpha\cos\alpha - H\sin\alpha$．这个向下的力被拱券的抗剪力 $\sigma_\alpha A_\alpha$ 抵消．事实上，拱券受到挤压会增加这一阻力．库仑对此作出了解释，即通过增加由挤压力 $H\cos\alpha + W_\alpha\sin\alpha$ 所产生的摩擦力 $\mu_\alpha(H\cos\alpha + W_\alpha\sin\alpha)$，可以抵抗沿$ab$发生的切变．库仑指出如果

$$W_\alpha\cos\alpha - H\sin\alpha \leq \mu_\alpha(H\cos\alpha + W_\alpha\sin\alpha) + \sigma_\alpha A_\alpha$$

则可以阻止拱券沿ab向下滑动．该不等式等价于 $W_\alpha\cos\alpha - \mu_\alpha W_\alpha\sin\alpha - \sigma_\alpha A_\alpha \leq H\sin\alpha + \mu_\alpha H\cos\alpha$，因此如果

$$\frac{W_\alpha\cos\alpha - \mu_\alpha W_\alpha\sin\alpha - \sigma_\alpha A_\alpha}{\sin\alpha + \mu_\alpha\cos\alpha} \leqslant H \tag{i}$$

则沿ab方向不存在向下的滑动．

设 $0° \leq \alpha \leq 90°$，考虑不等式左侧的项，令 F_0 是其最大值．库仑得出如果

$$F_0 \leq H$$

则有(i)对所有α均成立，因此在拱券的任何横截面上均没有向下的滑动损坏.

接下来假设 $H\sin\alpha \geq W_\alpha\cos\alpha$（或$\frac{W_\alpha}{H} \leqslant \tan\alpha$）. 此时，$H$和$W_\alpha$共同沿$ab$向上推拱券段$ABba$. 经过与上面类似的推导，库仑断言如果

$$H\sin\alpha - W_\alpha\cos\alpha \leq \mu_\alpha(H\cos\alpha + W_\alpha\sin\alpha) + \sigma_\alpha A_\alpha$$

则可以避免拱券沿ab向上发生位移. 做一个简单的代数变换（且只有$\sin\alpha - \mu_\alpha\cos\alpha\sigma_\alpha > 0$ 与之直接相关）可知如果

$$H \leqslant \frac{W_\alpha\cos\alpha + \mu_\alpha W_\alpha\sin\alpha + \sigma_\alpha A_\alpha}{\sin\alpha - \mu_\alpha\cos\alpha} \qquad \text{(ii)}$$

则可以防止产生沿ab向上的位移. 设 $0° \leq \alpha \leq 90°$，令 F_1 是该不等式右侧项的最小值. 可以得出如果

$$H \leq F_1$$

则有（ii）对所有α均成立. 此时沿拱券的任何横截面上均没有向上的位移. 总之，库仑得出这样的结论，即如果在AB处的水平力H满足

$$F_0 \leq H \leq F_1$$

该拱券任何地方都不会发生滑动损坏.

接下来库仑转而研究图6-29(a)所展示的铰合损坏. 这种铰合损坏是由作用在拱券上的力矩不平衡所导致的.

防止铰合损坏　库仑的分析要计算在$ABba$段上先绕b点再绕a点的力矩. 图6-32给图6-30增加了详细注解. 设b点与力W_α和H的作用线之间的距离分别为 x_0 和 y_0. 注意W_α想要使$ABba$段绕b点逆时针转动，而H想要使其绕b点顺时针转动. 图6-33(a)展示的那种开裂，意味着力矩 $W_\alpha x_0$ 比 Hy_0 要大. 不过如果这两个力矩间的差别由张力绕b点的力矩 $\tau_\alpha A_\alpha$ 抵消，就可以阻止$ABba$绕b点做逆时针转动. （注意，此时认为沿ab的摩

擦力和剪切力的力矩均为零．）因此如果 $W_\alpha x_0 - Hy_0 \le (\tau_\alpha A_\alpha)z_0$，就可以阻止这一转动．如果 $W_\alpha x_0 - Hy_0 \le 0$，或者说如果 $W_\alpha x_0 \le Hy_0$ 或 $\frac{W_\alpha x_0}{y_0} \leqslant H$，也可以阻止这一转动．设 G_0 为α在 $0° \le \alpha \le 90°$ 范围内变动时 $\frac{W_\alpha x_0}{y_0}$ 的最大值．库仑得出结论，如果

$$G \le H$$

$\frac{W_\alpha x_0}{y_0} \leqslant G_0 \leqslant H$ 对所有的α成立，在拱券内边界上的任何点都没有铰合损坏．

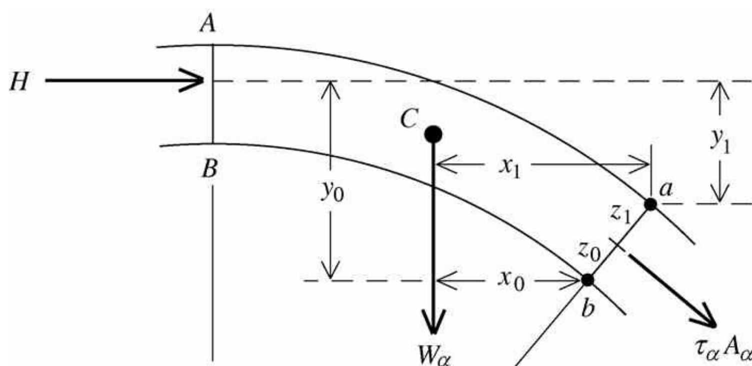


图　**6-32**

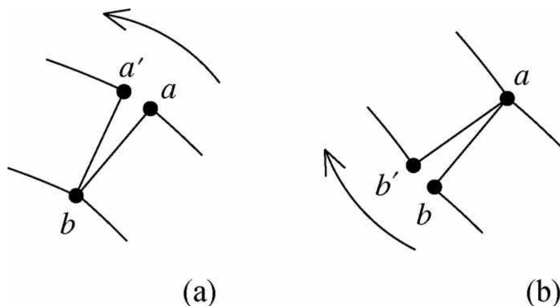


图　**6-33**

库仑用同样的方法分析了力在$ABba$段绕a点所产生的力矩，证明了如果

G_1 为 $\frac{W_\alpha x_1}{y_1}$ 的最小值($0° \le \alpha \le 90°$)且

$$H \le G_1$$

则在拱券外边界上的任何点都没有铰合损坏．因此，如果

$$G_0 \le H \le G_1$$

则在拱券的内外边界上的任何点都没有这种铰合损坏．

在库仑的两个稳定性条件 $F_0 \le H \le F_1$ 和 $G_0 \le H \le G_1$ 中，第二个条件关系更大，因为抗剪力（即使在两块拱石间的接触面上）通常足够大，能阻止滑动损坏．库仑的《论静力学问题》重点关注了 $G_0 \le H \le G_1$，继续讨论 G_0 和 G_1 值的确定．库仑认为用反复试凑的方法总比用“精确方法”（也就是微积分）更容易．比如，假设已知拱券的几何形状和材料，他建议首先计算 $\frac{W_\alpha x_0}{y_0}$ 在 $\alpha = 45°$时 时的值．如果比如说在 $\alpha = 40°$时重复以上计算，得到的值更大，则可以确定拱券的断裂点位于拱顶石和第一个结合处之间：重复这一计算，不断朝拱顶石方向前进，很容易找到 G_0．他继而说可以用同样方式得到 G_1：7.4节将提出用微积分计算 G_0 和 G_1 的方法．那一章结尾处的问题将会探讨库仑分析，包括他对 G_0 和 G_1 的陈述．

库仑考虑了拱券上的外力（重力及一个构件对另一个构件的推力）及其内部的内力（张力、挤压力和剪切力），通过平衡这些力及其产生的力矩，对拱券进行分析．对水平力H和半拱券重力的估计给出了对支撑该拱券的墩柱的结构要求，从而得以继续设计墩柱．通过将穹顶分成拱券（按波莱尼对圣彼得大教堂使用的方法），库仑的理论还可以用在穹顶中．诸如库仑定理这样的理论可以用来论证巴黎先贤祠穹顶的稳定性，给圣彼得堡以撒大教堂的施工提供知识．

材料强度和静力学方面的重大进展在18和19世纪不断出现．后来铸铁、钢和钢筋及预应力混凝土开始作为建造大型建筑的材料，由计算机技术对它们进行评估， 20和21世纪，结构分析走向新的方向．

6.4　悉尼歌剧院

1957年1月，年轻的丹麦建筑师约恩·乌松（1918—2008）赢得了一次设计大赛，要在伸出悉尼港的一块梦幻之地上建造歌剧及音乐综合厅．乌松是造船场场长及游艇设计师的儿子，他提交了一份设计方案，其中高耸的拱形屋顶看起来就像是一组张满了帆的帆船．图6-34展示了他画的一幅素描．审阅竞赛作品的专家组这样评价乌松的作品：

> 为这一主题提交的素描只不过是简单的示意图．然而，经过反复研究，我们确信按素描所表达的歌剧院构思，能建造出一座世界级的伟大建筑．

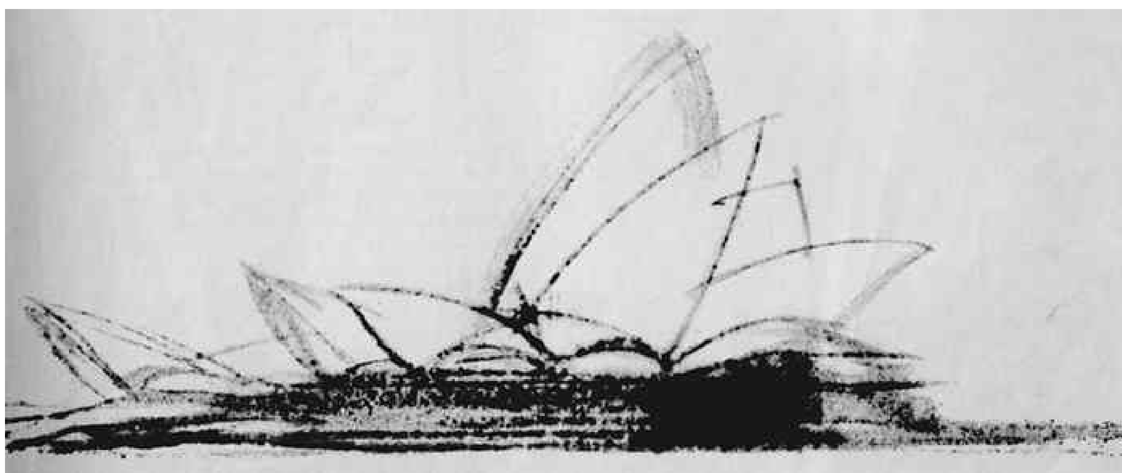


图**6-34**　乌松竞赛作品中的帆形拱顶素描．悉尼动力博物馆的收藏．版权归**Jan Utzon**所有

它确实将会成为世界级的伟大建筑之一，但建筑师构思的实现却是一次非常大的挑战．这一设计要求有两个大型观众席、一个餐厅以及必要的支撑结构．要有一个主厅，用来举行大型音乐活动，如大歌剧和管弦乐音乐会，还要有一个小的副厅，用来举行戏剧演出、独奏、室内乐和演讲．在专家组的推荐下，英国籍的丹麦人奥韦·阿鲁普（1895—1988）被指定为该项目的主结构工程师．20世纪50年代，阿鲁普的公司曾经为威尔士的一家工厂建造过大型混凝土屋顶．它是呈正方形排列的9个相同的混凝土壳，每个壳都呈拱形，横跨在18.9米×18.9米的矩形空间上空．由于它是当时最大的屋顶，受到了很多的赞誉．乌松和阿鲁普的办公室成为该项目设计团队的核心．后来他们中间又增加了声学、剧院设

计及机械和电气工程方面的专家作为顾问.

与帆船的类比也延伸到项目的施工阶段，包括建筑和功能两个方面. 要有“甲板下”的基础结构、必不可少的“桅杆和帆结构”以及其他所有“甲板上”的部件. 相应的，项目分成3个基本阶段：墩座、拱形屋顶的弯曲的壳以及其他部分，包括主厅和副厅内部，尤其是音响和座位的安排.

墩座　这座混凝土基础结构占据了115.8米×185.9米的一大块长方形区域，覆盖了几乎整个施工现场，从地基直达观众席的座位高度. 它应该包括一些表演区（室内乐厅、实验剧场、排练厅）、入口大厅、餐馆厨房、售票处、储藏及更衣室、自助餐厅、行政区、会议室、油漆及木工店以及电气和电信设施. 墩座要这样建造，即使每处表演场所，特别是两个主要的观众席要与这座综合性建筑其他地点所产生的声音和振动隔离开来. 它还应是一个大广场，需含有供小汽车、公共汽车和卡车使用的大型室内交通空间. 大广场的平屋顶上是大型露天平台，可以由宽大的楼梯到达，是观赏歌剧和音乐会的人进入观众席的主入口. 很明显，建造悉尼歌剧院的墩座是一项庞大复杂的事业.

墩座于1959年3月开始施工. 依本文看来，施工中最有趣的部分是大广场的屋顶. 考虑到这个屋顶如此广阔，乌松的设计中原本要求有大量柱子进行支撑. 阿鲁普的团队能去掉这些柱子，创造出净空间约为48.8米×95.1米的大广场区，其规模接近于一个足球场. 考虑2.4节中对柱梁结构局限性（该局限性由梁内产生的张力所致）的讨论，这是非比寻常的. 阿鲁普的团队怎样才能获得这样大的净空间？原因在于所安装的梁使用了预应力混凝土，并且将“折板”设计与复杂的变横截面几何形状结合起来.

先谈一下预应力混凝土. 正如前面已指出的（在2.5节），没有钢筋的混凝土抗挤压能力很强，而抗拉伸能力则要差得多. 混凝土的抗压强度与抗拉强度之比约为 12∶1. 可以通过埋入铁或钢条（杆）来对它们进行加固，但对要求极高的应用而言，这还不够. 预应力或更准确地说，预压缩混凝土的加工过程依赖于混凝土的抗挤压能力. 考虑一根由模具浇筑的混凝土梁. 纵向小心地放进一组金属管，作为该模具的一部分. 灌入混凝土并等它变硬后，把抗拉强度大的钢缆穿过这些管子. 这些钢缆被绷紧（用液压千斤顶）并在处于很大张力的情况下紧紧地锚定在梁的两端. 加工完的梁在钢缆的拉力下，受到很大的挤压. 管中的其他空间由特殊的灰浆压注. 这就将钢缆固定在梁内并防止了侵蚀. 如果这些工作完成无误（而这是关键），则不管受到什么负载和张力，梁都会一

直受到挤压！如今预应力混凝土在巨大负载的建筑中已很常见，如桥梁和高架桥等，不过在建造这座歌剧院的时代，它还刚开始广泛使用．

阿鲁普的工程师通过用52根平行分布的预应力混凝土梁搭架平屋顶，创造出了大广场的大片净空间，其中每根梁宽约2米，长约49米．图6-35展示了沿长度方向的大广场梁的截面图．斜向下的那段梁支撑着大楼梯．该图表明梁的预应力缆在中跨点（用b表示）沿着该梁的底部伸展．这是因为梁上的张力在中跨点的底部最大，如图2-19(b)所示．该图还显示，梁的左右垂直边界处向里弯曲．参见大广场梁，这一效应解释了为何预应力缆在0和2 b点处靠近顶部（从而阻止梁在那里受到拉伸）．地基里的预应力系梁用来抵消梁所产生的向外的侧推力．

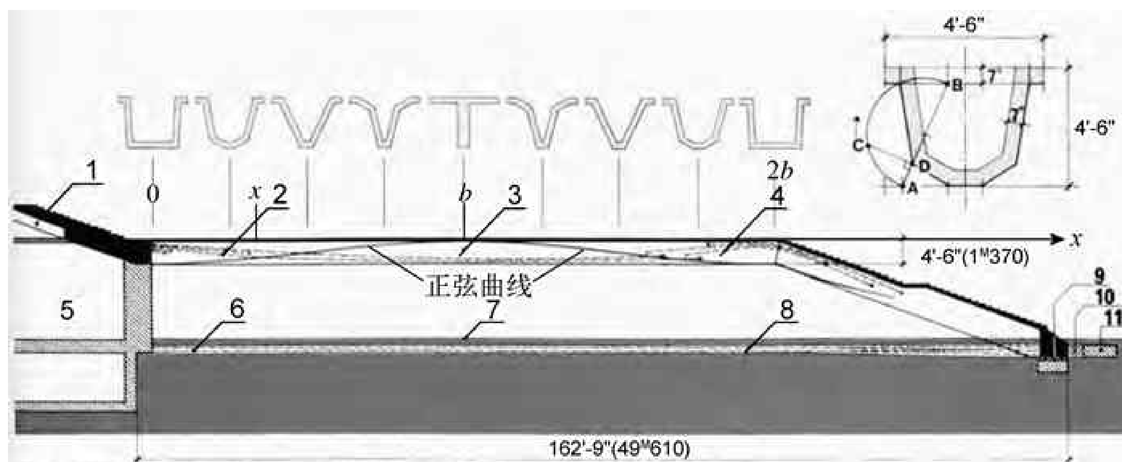


图**6-35**　大广场梁的截面图．在原图中加上了***x***轴及坐标为**0**、***x***、***b***和**2*b***的点，它们在分析梁的几何形状中起到一定作用．**1.** 梁的上部 **2.** 预应力缆 **3.** 大广场梁 **4.** 预应力缆 **5.**基础结构 **6.** 系梁 **7.** 地平面 **8.** 预应力缆 **9.** 滑动支架 **10.**顶升点 **11.** 系梁的十字头．选自《乌松的球体：悉尼歌剧院**——**它的设计和建造方法》（***Utzon's Sphere: Sydney Opera House—How It Was Designed and Built***），**Yuzo Mikami**著，**Osamu Murai**摄，**Shokokusha**出版，东京，**2001**，图**5-11**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

还有更多大广场梁的故事．人们都知道用瓦楞纸，也就是带平行脊和沟槽的纸做成的纸板会更坚固．阿鲁普的工程师也将这一常识用在梁的设计中．他们将皱褶设计成沿梁的长度方向变化，因此梁能维持足够的预应力，结构效果更好．从一个支撑点到中跨点再到另一个支撑点，梁的横截面从U形向V形再向T形变化，再重新变回为V直到U形．图6-35展示了U、V和T形序列的变化模式．但横截面采用这种变化模式的连续梁

该如何设计？它的横截面该如何从一种形状向另一种过渡？一种有趣的几何作图法对这些问题作出了解释．

过梁的中间在其顶部沿长度方向建立x轴．从6-35中可以看到，梁从x=0点水平延伸到梁的中跨x=b点（b约为54英尺），再到x=2 b点（在它斜向下之前）．令x为0~2 b间的任一坐标．关键的问题是：给定x=0（U形）、x=b（T形）和x=2 b（重为U形）处的横截面，对0和2 b之间的特定x，梁的横截面应为什么形状？要回答这一问题，阿鲁普的工程师首先考虑一个周长等于2 b的圆．该圆的半径R满足$2\pi R = 2b$，则有$R=\frac{b}{\pi}$．图6-36绘出了该圆的一部分．选择角度θ，使得θ所确定的扇形的曲线边长度为x．由于圆心角所切割的那部分圆的周长与该角度成正比，则有$\frac{\theta}{x}=\frac{180°}{b}$，因此有$\theta=(\frac{b}{x}180)°$．

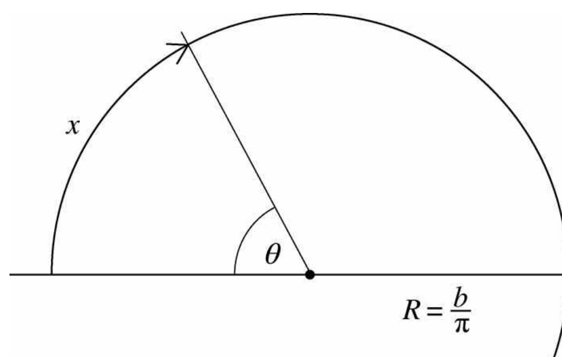


图　**6-36**

在开始下一步前，将x轴补充成xyz坐标系，如图6-37所示．每个坐标轴的长度单位都是英尺．现转向图6-38．它是将图6-35右上角的示意图放到yz平面后的细图．混凝土板的厚度c=7英寸，即$c=\frac{7}{12}\approx 0.583$英尺．点$A$和$F$由梁在支撑点处的U形横截面（图6-35内0上方的U形）的左侧边来确定．线段FA并不完全竖直，A比F离z轴要近1英寸．点B和G由梁在中跨点的T形横截面（图6-35内b点上方的T形）的左竖直侧边来确定．图中点A、F、B和G都是固定的，以AB为直径、O为圆心的圆也不变．仔细看一下图6-38给出的数据，可知AG=36-8-7=21英寸，即$\frac{21}{12}\approx 1.75$英

尺，BG=54-7=47英寸，即$\frac{47}{12} \approx 3.92$英尺．因此$\tan\alpha = \frac{BG}{AG} = \frac{47}{12} \approx 2.24$，通过计算器中的 $\tan^{-1}$ 键，可得 $\alpha \approx 65.92°$．根据毕达哥拉斯定理，该圆的半径为 $r = \frac{1}{2}AB = \sqrt{AG^2 + BG^2} = \frac{1}{2}\sqrt{21^2 + 47^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2650} \approx 25.74$ 英寸，即 $\frac{\sqrt{2650}}{24} \approx 2.14$ 英尺．



图　**6-37**

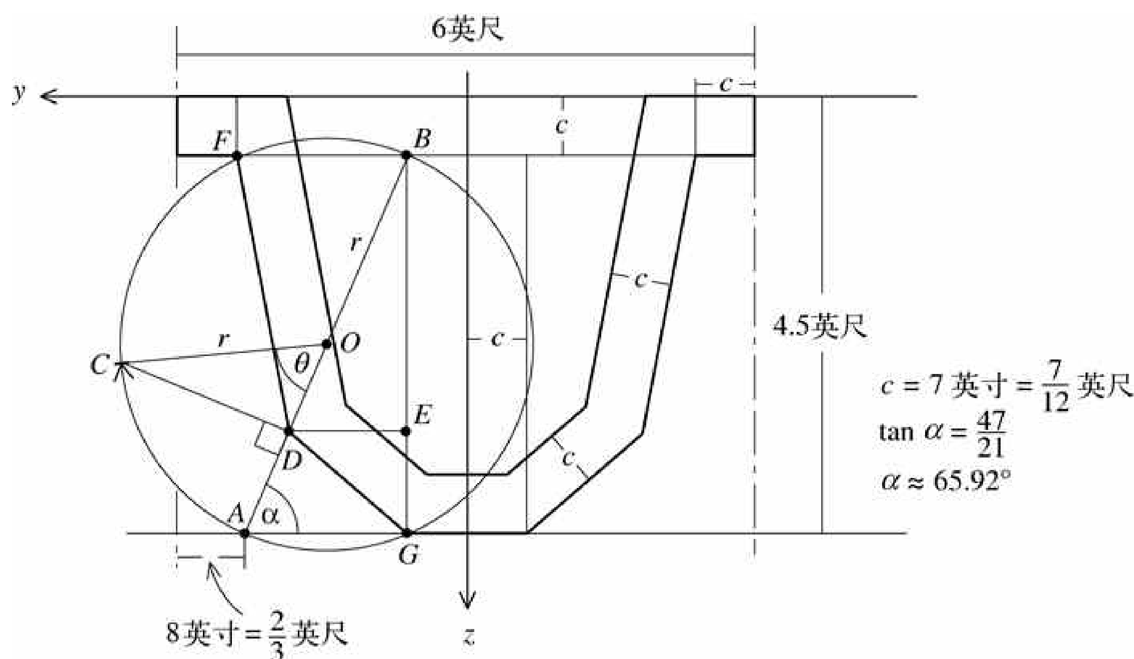


图　**6-38**

现取图6-36中的角θ，在图6-38的圆上选择点C，令 $\angle AOC = \theta$，将角θ放入图中．令D为直径AB与过C点的AB的垂线的交点，令E为过D点的水平线与BG的交点．因为F和G点固定，D（以及该图关于z轴对称的事实）确定了图6-38中图形的外边界．图形的内边界则由外边界及板的厚度c

确定．D点确定的图形就是所要设计的梁在x点的横截面图．注意当x从0增加到b时，θ从0°增加到180°．在这一过程中，点D从A点移到B点，左侧的外边界FDG从FAG变到FBG，图案从U形变到T形．对 0°和 180°之间的某个角度，FDG成为直线段，图案变成V形．当x从b增加到2 b时，θ从 180°增加到 360°．在这个过程中，D点从B回到A，图案也从T形变回V形，再到U形．因此，当x从0移到2 b的过程中，图案完全按照图6-35描绘的横截面序列变化．阿鲁普的工程师准确地获得了所需要的东西：梁的横截面图案，它沿其水平方向平滑地从U形变到V形直到T形，然后再变回去．

在该问题的最后，我们将计算点D的y、z坐标．观察△OCD，可知 $\cos\theta=\dfrac{OD}{r}$．因此 $OD = r\cos\theta$ 且 $BD = r + r\cos\theta = r(1+\cos\theta)$．从△$BDE$可知，$\cos\alpha=\dfrac{DE}{BD}$，$\sin\alpha=\dfrac{BE}{BD}$．因此有 $DE = BD\times\cos\alpha = (r\cos\alpha)(1+\cos\theta)$，且 $BE = BD\times\sin\alpha = (r\sin\alpha)(1+\sin\theta)$．．可得$D$点的$y$和$z$坐标分别为

$$y=(r\cos\alpha)(1+\cos\theta)+c=(r\cos\alpha)\left(1+\cos\left(\frac{x}{b}\times180^\circ\right)\right)+c$$

和

$$z=(r\sin\alpha)(1+\cos\theta)+c=(r\sin\alpha)\left(1+\cos\left(\frac{x}{b}\times180^\circ\right)\right)+c$$

这些方程给出了阿鲁普设计的预应力大广场梁的精确的数学描述．图6-35用实曲线绘出了 $z=r\sin\alpha(1+\cos(\frac{x}{b}\times180)^\circ)+c$ 的图形（标为“正弦曲线”），它沿梁的横截面向前延伸．

阿鲁普设计的坚固的混凝土梁不仅为大广场创造出大片净空间，从下面看，每根弯曲的梁都像是船体的底部，大广场天花板的波浪形表面产生了一种与乌松歌剧院建筑群的帆形拱顶设计风格相一致的视觉效果．

拱形屋顶　从乌松创造性的设计（鼓起的帆形屋顶丛）到其实现是一条

极其艰难的路．这些自由飘动的雕塑形式，其明确的几何学定义应该是怎样的？这种全新的拱形屋顶应该用哪种材料合成，使用哪种施工方法？为回答这些问题，从1957~1963年，人们花了数年时间进行解释、分析、争论并做了繁重的工作．

没有用数学明确表达几何形状之前，这种规模和复杂度的屋顶结构不可能建造出来．没有数学模型，就不可能计算穹顶可能会受到的负载、应力和旋转力，不可能估计风和温度变化对其稳定性的影响．没有明确定义的几何形状（例如图4-26中圣索菲亚大教堂的球形几何），就不能进行必需的计算和计算机分析，也就不能继续建造这座史无前例的建筑．抛物线（考虑拱顶的三维特性，更准确地说，是抛物面）曾是乌松对拱顶轮廓所做的第一个选择．如图6-39所示．后来，他又考虑了椭圆（或同样更准确地说，椭圆体）．我们后面很快要探讨，这两种几何体都不适合建造的原因．

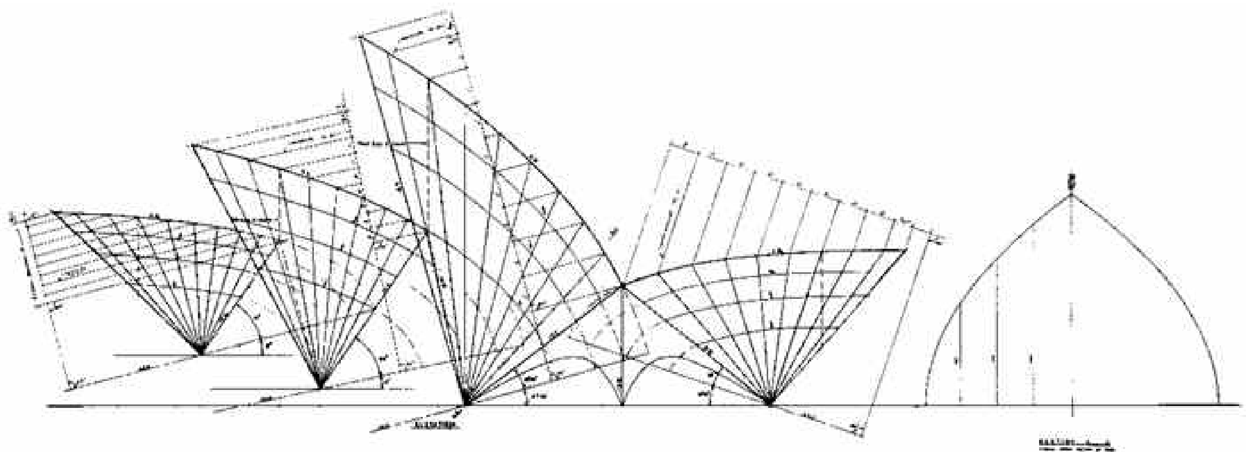


图**6-39**　主厅壳的早期抛物线设计方案．选自《乌松的球体：悉尼歌剧院——它的设计和建造方法》，**Yuzo Mikami**著，**Osamu Murai**摄，**Shokokusha**出版，东京，**2001**，图**4-10**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室．承蒙阿鲁普的好意

乌松的第一个想法是将他设计的拱顶建成混凝土薄膜结构．这种像蛋壳一样的混凝土屋顶在那时很常见．阿鲁普公司在建造威尔士工厂的屋顶时就是这么干的，其混凝土壳只有约7.6厘米厚．这种膜结构要稳定，需要满足两个基本条件．首先壳需要具有这样的几何形状，即每个高度上因壳体重量所产生的向外及向下的侧推力都能完全（或几乎完全）被壳体下方的推力所抵消．（7.3节中将研究这种几何形状，你会看到它是倒转的悬链形．）而且，壳必须由坚固的刚性边梁围绕，以便限制其

边界处的向外的侧推力．如果满足这两个条件，壳的重量就会由壳内的挤压力及刚性边梁的反作用力承担．但是，乌松设计的有尖角、陡然上升的拱顶却与这些要求全不相容．既然不可能摈弃他的建筑理念，将拱形屋顶建成混凝土膜的想法就被放弃了．

帆形壳之间的宽敞高大的露天空间是乌松设计中的另一个复杂问题．这些留给较小壳结构及大窗户的空间，可以将光线和美丽的悉尼港景色收入这座建筑的大厅之中．但这些露天空间的存在意味着壳体与墩座间的接触区域变得窄而集中．考虑到各种设计参数，阿鲁普确信只能将每个这种帆形屋顶结构建成一系列弯曲的拱肋（其底部较窄，随着高度的增加而迅速变宽），它们从墩座的公共点起拱，呈扇形向外、向上展开．每个拱形屋顶将包括两个这样弯曲的扇形结构，一个是另一个的镜像，它们从相对的两边升起，在顶部的圆形屋脊处相交．乌松激动地认可了这一概念："我不关心它的花费，我也不关心要花多长时间建成或它会招致什么样的辱骂，但这就是我想要的．"

这样就解决了第一个问题，但还存在几何形状的问题．壳的大尺寸意味着它们不得不分成几个构件进行建造．为了满足经济和时间方面的要求，这些构件要能批量生产．抛物线或椭圆壳达不到这种要求，这是因为每根拱肋的形状会各不相同，如图3-69所示．会有这样一种几何体，使得用标准化的相同构件就能建造出一种赢得悉尼歌剧院大赛的弯曲的帆形骨架结构吗？如果回答是否定的，就不可能实现乌松的设计，项目将会失败．

突然乌松灵光一闪．理论上，壳的表面应以同样的方式向各个方向弯曲，而唯一一种有这种性质的表面是半径给定的球体．乌松突然意识到可以在球体上画出无限多种曲面三角形．这样就能把屋顶的所有壳设计成从同一球体上得到的曲面三角形．这种想法拯救了这个项目．乌松和阿鲁普终于在黑暗中看到了曙光．1962年2月1日，乌松绘制出他的所谓最终稿．如图6-40所示．在观察该稿最下方的小字时，他意识到这一天距离官方宣布他赢得比赛已过去了整整5年．

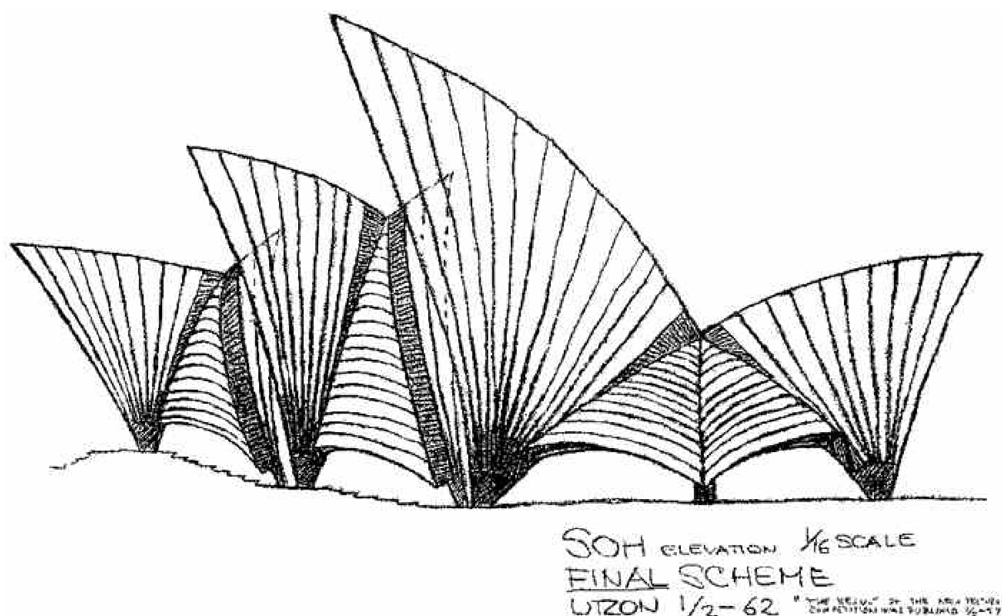


图**6-40**　主厅的壳序列，乌松绘于**1962**年**2**月．选自《乌松的球体：悉尼歌剧院——它的设计和建造方法》，**Yuzo Mikami**著，**Osamu Murai**摄，**Shokokusha**出版，东京，**2001**，图**9-1**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室．版权归**Jan Utzon**所有

让我们分析一下乌松构思的曲面三角形．考虑球心为O、半径为r的球．建立xyz坐标系，使原点位于球心O，如图6-41所示．令A、B和C为球面上的3点，旋转该球，使A位于y轴上．分别用过A、B和A'及过A、C和A'的曲线表示由点A、O、A'、B及A、O、A'、C所确定的平面与球面相交得到的圆．过原点O的平面与球相交得到的任何圆都称为大圆．这样弧AB和AC均位于大圆上．将点B和C沿z轴的平行线投影到xy平面．投影线确定了一个过B和C且垂直于xy平面的平面．该平面与球的交线为一个圆，它给出了弧BC，这样就确定了乌松设计的$\triangle ABC$．

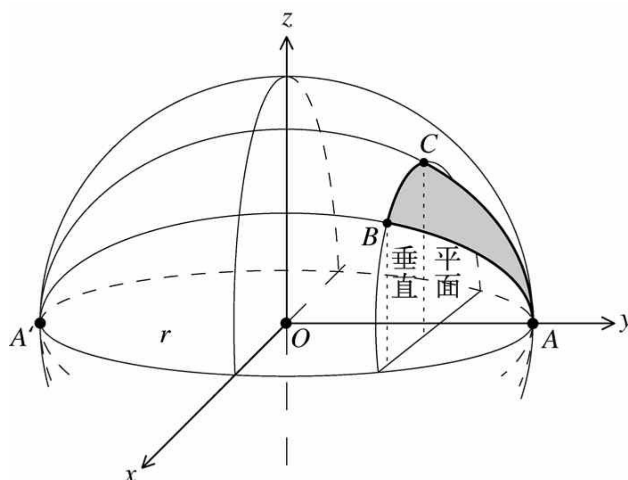


图**6-41**　乌松设计的球面三角形

过点*B*和*C*有许多（无穷多）平面，因此有许多（无穷多）种用球上的圆弧连接*B*和*C*的方法．乌松选择了位于垂直平面上的圆弧*BC*，这意味着他能通过在圆形脊*BC*处连接球面三角形*ABC*及它的镜像图来设计每个拱形屋顶．图6-42(a)和图6-47（该图更生动）展示了这一方案．乌松的球体观点也与阿鲁普的拱肋概念相容．大圆能将球面三角形分成扇形分布的拱肋，每个拱肋能被建成一系列预应力混凝土段，其边则由同一个大圆确定，如图6-42(b)所示．乌松和阿鲁普将球的半径确定为246英尺，从该球可以得到所有匹配的球面三角形对．在所有的情况下，任意两个相邻拱肋在起拱点*A*处的夹角都为 3.65°.

图6-43描绘了主厅的壳系列里的4个三角形．这些图中每一个都是图6-41的具体例子，其中球以一种方式旋转，使得过*B*和*C*的垂直平面平行于本页平面．壳A1给出了入口大厅的拱顶．壳A2是舞台区特别是容纳许多大型电梯以便移动布景的舞台塔上空的拱顶．它的高度约为220英尺，是这座建筑里最高的拱形屋顶．壳A3是主观众席、座位区及吸声天花板上空的拱形屋顶．壳A4覆盖了宽敞的休闲区，它由一片玻璃墙隔开，透过玻璃墙，欣赏歌剧和音乐会的观众能看到生动的悉尼港大桥全景以及海港中的航运活动．图6-44展示了壳A1到A4的球面三角形以及产生它们的球面，三角形的位置与乌松对主厅的设计相同.

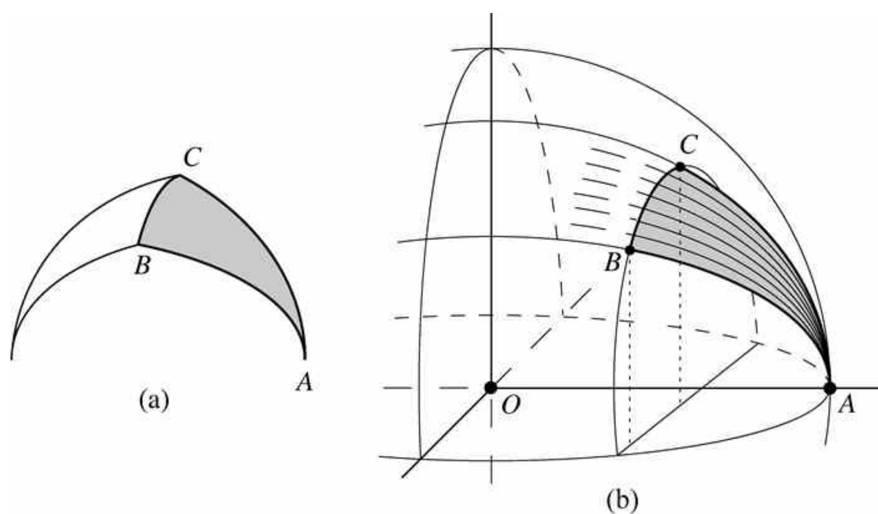


图**6-42**　乌松设计的拱顶及阿鲁普设计的拱肋

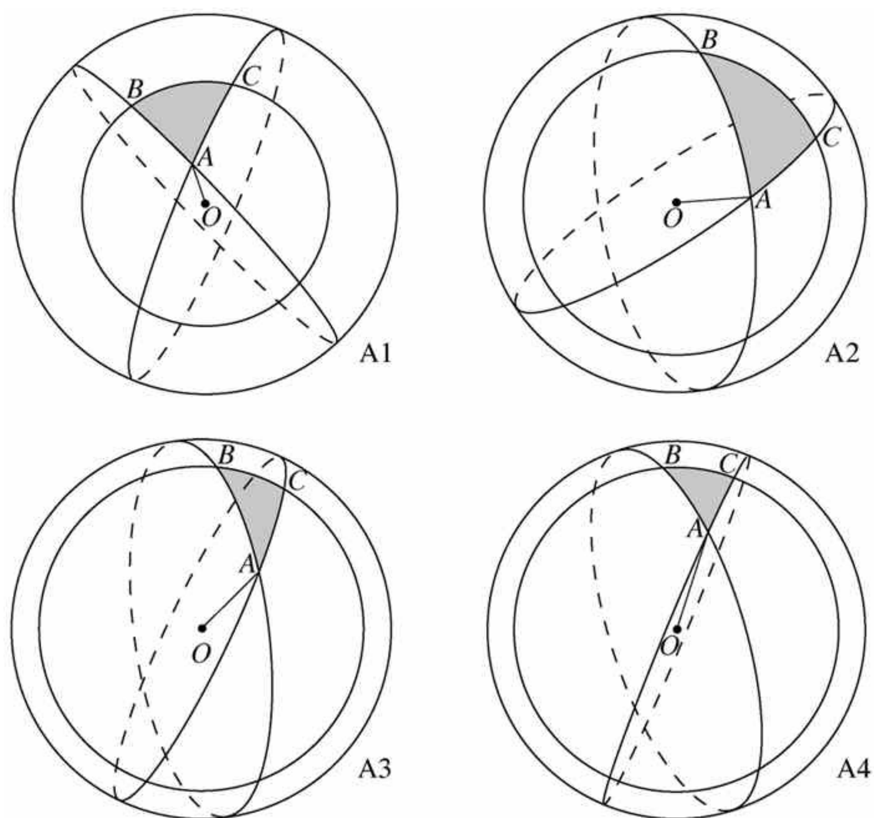


图**6-43**　主厅**A1**到**A4**拱顶的球面三角形．选自《乌松的球体：悉尼歌剧院**——**它的设计和建造方法》，**Yuzo Mikami**著，**Osamu Murai**摄，**Shokokusha**出版，东京，**2001**，图**8-10**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

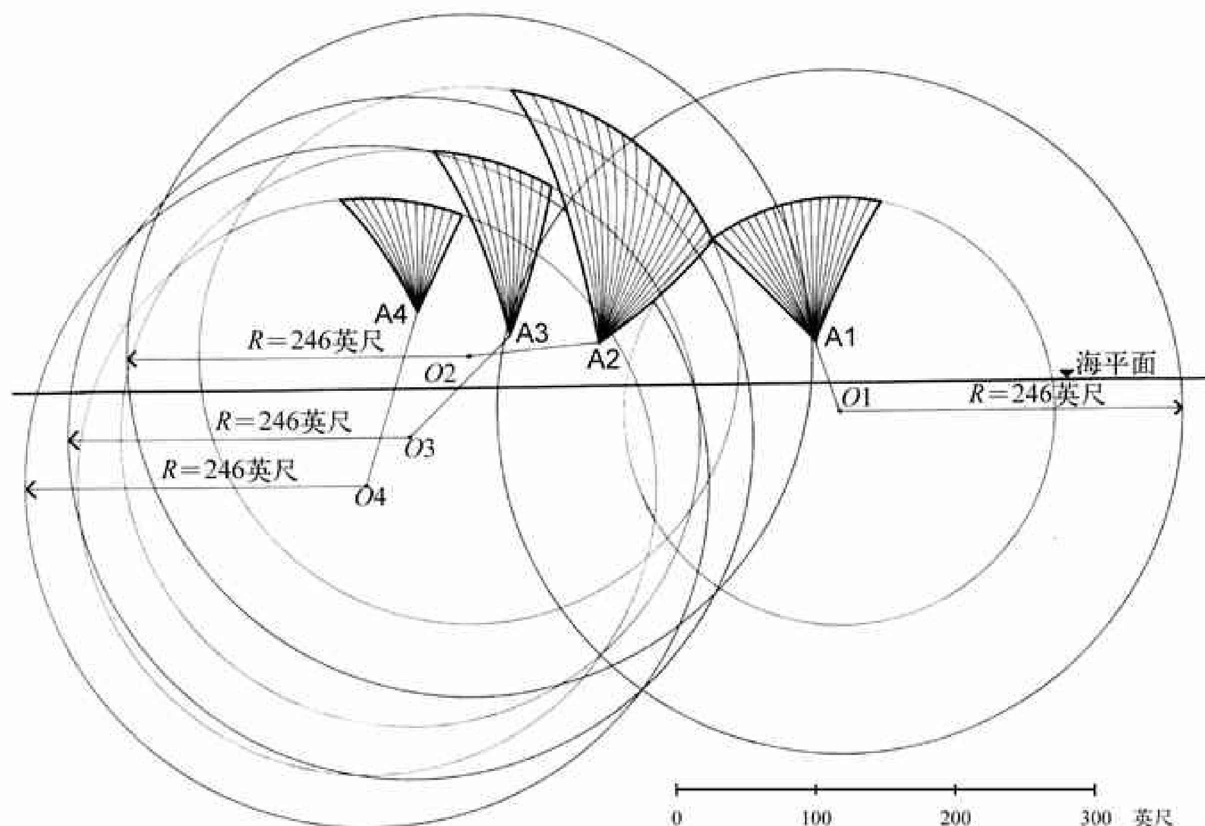


图**6-44**　在适当位置的主厅壳**A1**到**A4**．选自《乌松的球体：悉尼歌剧院——它的设计和建造方法》，**Yuzo Mikami**著，**Osamu Murai**摄，**Shokokusha**出版，东京，**2001**，图**8-11**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

比较图6-34和图6-40，可以看出乌松的单球体方案改变了屋顶轮廓的视觉特性，使它的较为壮丽优美的外形变得比较刚硬和沉重．但乌松和阿鲁普知道单一球体是一次重大进步．现在有可能用批量生产的重复构件来建造拱顶了．阿鲁普后来回忆说：“我们不想把建筑师拖下地狱，但真想让他把我们拉上天堂．”此时，他脑子里想的就是这一次突破．无疑乌松受到阿鲁普仅关注“如何建造它？”的影响．不过，球体方案还是他提出的．

现在，乌松和阿鲁普的团队终于能完成这一设计细节了．图6-45展示了壳A2的细节．拱肋段要求用预应力混凝土制造．它们的横截面被设计成从墩座附近的窄T形变到窄实心Y形，到更上面的比较宽的空心Y形．图6-45(c)中编号为7的拱肋段是这种空心Y形的代表．顶部和底部凸缘内3个一组的孔眼是拱肋段里为预应力缆所铸出的管口．组成拱肋的各段

方案细节如图6-45(b)所示．对每个壳，该方案中的各段几乎都用同样的方式向上伸展．图6-45(a)展示了编号为12的拱肋及其匹配对所形成的拱．它让人想起佛罗伦萨大教堂穹顶的哥特式$\frac{1}{5}$拱（见第4章），二者基本相同．

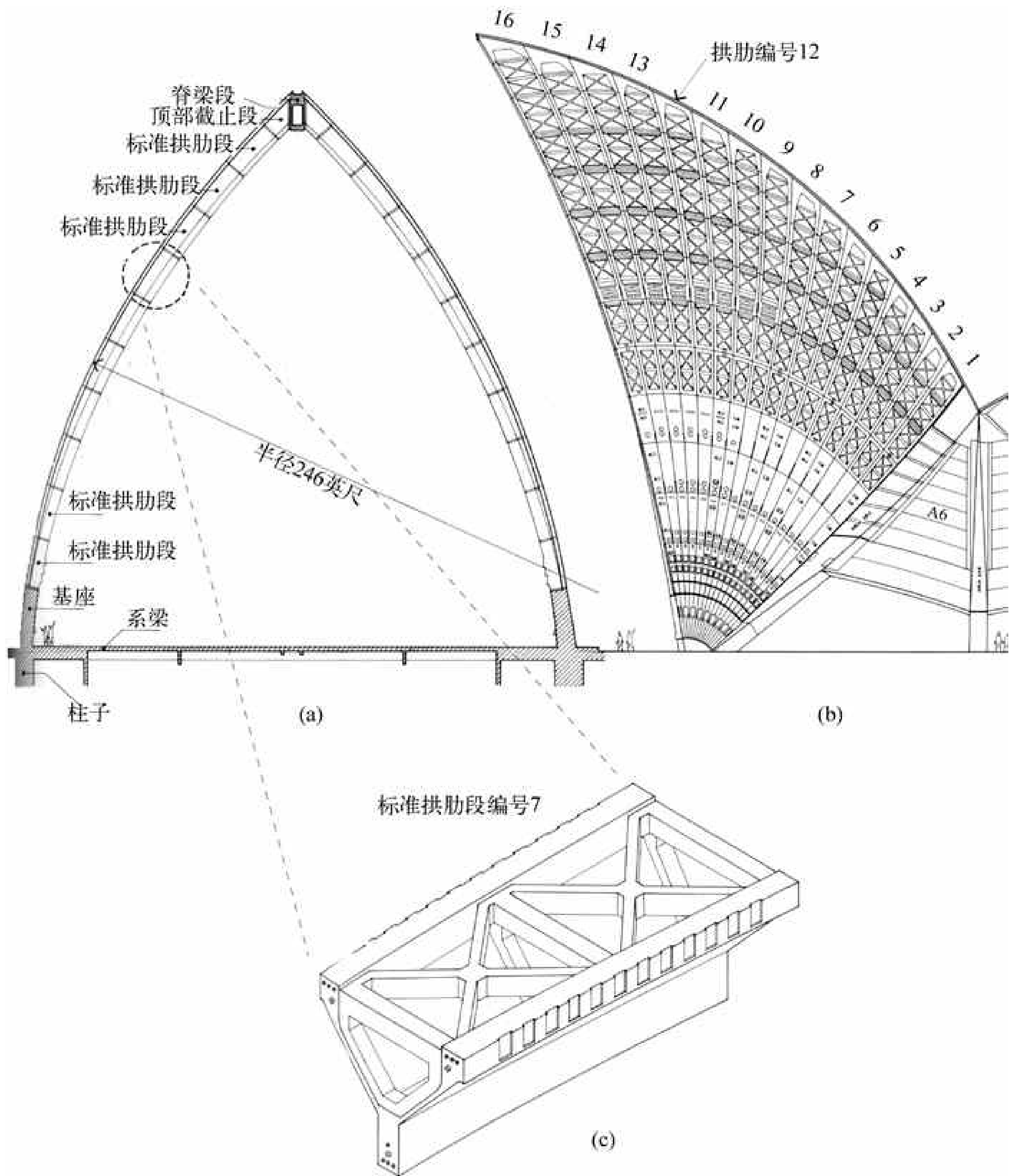


图**6-45**　壳**A2**的拱肋方案．选自《乌松的球体：悉尼歌剧院——它的设计和建造方法》，**Yuzo Mikami**著，**Osamu Murai**摄，**Shokokusha**出版，东京，**2001**，图**9-13**、图**9-15**及图**9-16**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室．由阿鲁普提供

现在可以开始建造拱顶了．人们现场预制各种混凝土拱肋段．共浇筑了1498块标准及280块非标准拱肋段，每个长4.6米，共有12种类型．其中7种在壳的最底部，分别制作了280、280、260、196、174、110和82块．数量如此多的相同的预制构件简化了拱形屋顶的施工．更关键的是，它降低了成本，节省了时间．图6-46展示了1966年施工中的两个壳．注意壳底部已封闭的拱肋段及较高处还未封闭的拱肋段．图片还展示了位于建造中的两个拱顶过渡处的较小的壳．这些侧壳在主穹顶完工前就已经开始建造．

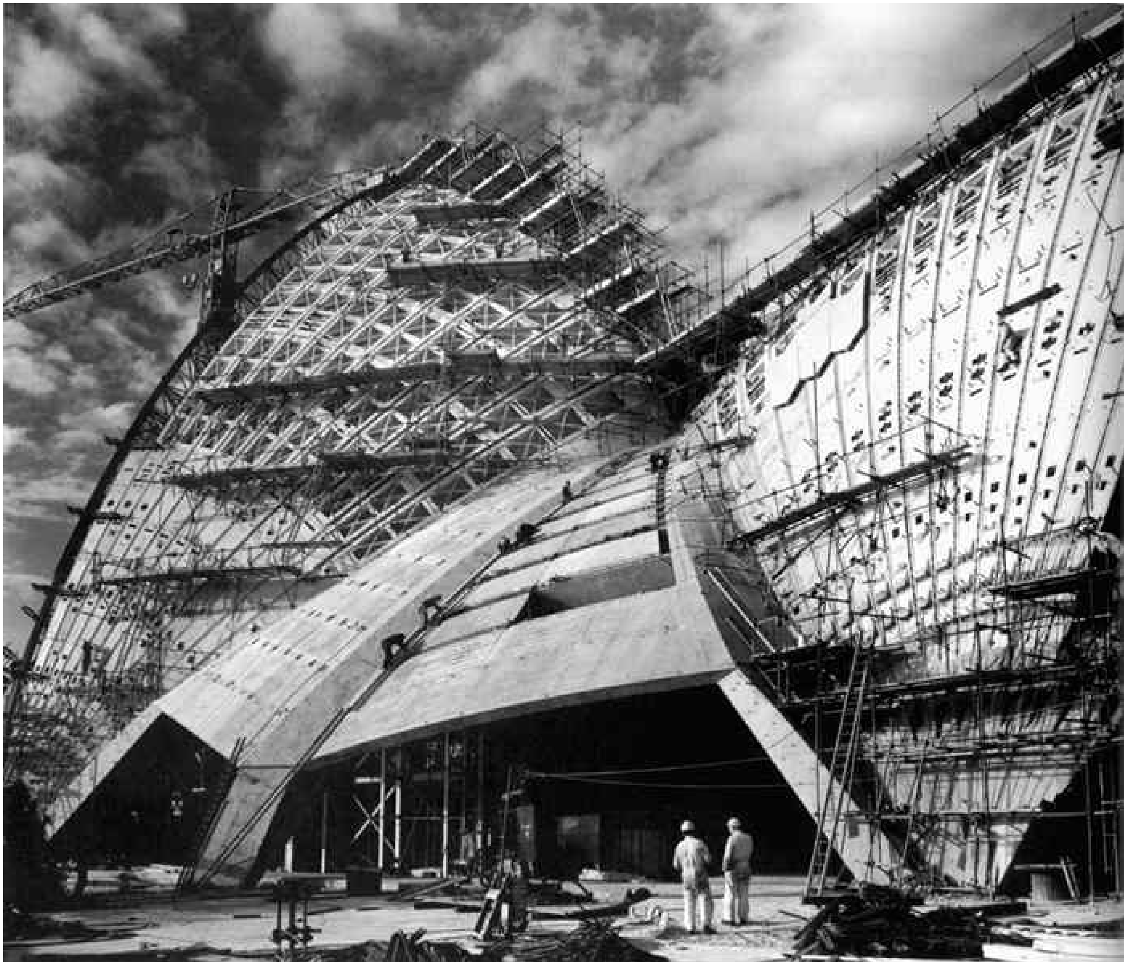


图**6-46　1966**年对壳的施工．**Max Dupain**摄．版权归**Max Dupain**和**Associates Pty.**公司所有

拱顶中拱肋的建设面临一个问题．正如图6-42(a)和图6-45(a)中所看到的，三角形壳的每根拱肋在对面一侧的镜像壳内都有一根拱肋与它匹配．一般而言，从拱肋段开始建造每组配对拱肋的方法与从拱石开始建造拱券相同．但麻烦的是，在拱肋高度增加的同时，它还要倾斜并变

宽．我们在2.5节已了解到，在建成前拱券并不稳定，需要由拱鹰架结构进行支撑．而在拱顶的拱肋施工过程中，这些要怎么做到？问题的关键是采用由曲面三角形钢桁架制成的安装拱券．它是起作用的．用最大的一台起重机吊起拱肋段，将其放在上一块已放好的拱肋段上方．它的一边由前面已完成的拱肋支撑，另一边由安装拱券支撑．在要把这段拱肋放到已就位的那段上方之前，可以涂上环氧树脂涂层，以便将两个接触表面粘到一起．安装拱券可以根据正在施工的拱肋尺寸和倾斜度展开或压缩．它可以在图6-46中看到，即左侧拱顶边界处的深色拱券．它旁边的拱肋正在建设中，最底下的几段已经放好了，它们的上面是上层段的开口．用这种方法，逐段逐根地建造拱肋，壳逐渐得以完工．

剩下的难题是覆盖和密封壳的外表面．乌松用复杂的瓦片系统完成这一工作．他选择了两种方形瓦，一种毛糙，一种光滑，颜色为略有差别的乳白色．它们需保护该结构免受一些因素的影响，并要按一种好看的图案来铺设．他们决定将瓦片粘合成V形，铺在波浪形的混凝土板上．这些瓦片板称为盖子，约有15.2厘米厚，2.3米长．图6-46中能看到3个已铺好的这种盖子，就在右侧壳的高处．这些盖子用几层钢丝网加固，它们很轻，不会给壳增加很大的重量．为了减少下面壳的热效应，它们的背部都喷有绝缘泡沫．为了使其能完全贴合壳的轮廓，盖子也是球面的一部分，该球的半径比壳所属的球的半径80.5米大一点（大21.6厘米）．最后，每个盖子都用支架和螺栓锁好，支架和螺栓可以进行调整，以便让它精确地处于所要求的球面位置．毋庸置疑，这些复杂的瓦片盖子的设计考虑了许多因素，使用了数学与计算机分析．盖子的球面几何形状使人们能标准化制作所需要的4000多块盖子．当最后一块盖子于1967年1月放好后，歌剧院建筑群的拱形屋顶终于完成了．它的V形排列的瓦片在阳光中闪闪发亮，达到惊人的视觉效果．

驶进风暴　现在已经为主厅和副厅的内部施工做好了准备．尤其要注意3个方 面：座位（包括其数量和安排），音响效果及将拱形休闲区的开口处封闭起来的大玻璃幕墙．这些问题之前已经得到了解决．无疑歌剧院项目从此将向着胜利的终点航行．可是还没那么快．座位数、音响特性、费用超支以及施工项目的按时完工等问题不断出现．政党政治的分裂使问题更加严重．

工程的成本随技术难度及其所带来的工期延误成比例地增加．乌松的成本预算从1958年3月的960万澳元，飙升到1961年8月的1860万，到1962年4月的2750万，再到1965年7月的5000万澳元．（这期间，1澳元约值

89美分．）为该建筑筹资的彩票抽奖越来越频繁．（该建筑竣工时，最后的总花费达到1.02亿澳元．）

起初，主厅希望既作为歌剧院，也作为音乐厅使用，每种功能都有各自的座位分配，并想要成为澳大利亚歌剧团和悉尼交响乐团之家．但乌松的设计给可用空间带来了压力．作为歌剧厅使用，副舞台比较小，对主舞台而言是个问题，因而在设计时使用了搭载大型电梯的舞台塔．歌剧舞台布景可以垂直而不是水平移动，与航空母舰上的飞机从下方的飞机棚升到甲板上的方式相同．作为音乐厅使用，澳大利亚广播委员会希望座位数至少达到2800个，还希望要足够大的舞台区，使其不仅能供管弦乐团，也能供大合唱团使用．对音响效果的期待增加了问题的难度．委员会想要中频时的混响时间为2.0秒．这意味着主厅内部的体积至少为28 317立方米．

歌剧院项目一度是澳大利亚工党的主张．但1965年，在工党统治了24年后，自由党赢得国家大选．在竞选运动中，自由党承诺削减歌剧院建筑群越来越多的开支并减少工期延误时间．新的自由党公共事物部部长指控乌松只为其设计的内部音效提供了的含糊信息，并决定不再为该项建设追加资金．1966年2月28日，壳接近完工时，施工遇到了最可怕的挑战，乌松被迫辞职．一个建筑师小组被认命替代他的位置．在阿鲁普公司的帮助下，他们完成了这座建筑．主厅的身份从双重功能设施变成单功能音乐厅．已安装的用于移动舞台布景的机械被拆除，歌剧院被移到副厅中．休闲区的玻璃正面得到完成，其设计风格与乌松所要的并不相同．现在，它们从顶部以椭圆柱体的形状向下延伸，在底部则按圆锥体的形式扇形展开．这一建筑在1973年10月20日开放，伊丽莎白女王参加了此次开幕式．悉尼用贝多芬的第九交响曲及欢乐颂进行庆祝．

悉尼歌剧院证明旧时代伟大建筑的品质，如对地点、光线反射、空间创造、规模和比例的恰当选择以及合适材料的使用，这些仍然是伟大建筑必须具有的关键品质．它是堪与古代文明成果相匹配的当代建筑，奠定了乌松作为20世纪最新颖、最重要的建筑师之一的地位．他重新考虑了标准构件的工业预制，从而产生了复杂、富于表现力的曲面形式，与实用的矩形秩序相区别．正如图6-47和彩图24所显示的，悉尼歌剧院是一座非凡的建筑物．它是一座背靠海港的大型白色雕塑，捕捉并映现着天空及其变幻无穷的光线，日复一日，从黎明直到黄昏．影响深远的美国建筑师路易斯·康谈到“以前从不知道太阳的光线如此绚丽，直到它被这座建筑所反射”．它使世界各地的人们对它悠然神往，成为悉尼的城市

象征．2003年，约恩·乌松荣获权威的普利兹克建筑奖；2006年，他创造的这一建筑被评为世界文化遗产．



彩图 **24**　悉尼歌剧院建筑群的壳和墩座，Matthew Field 摄

我们下面将转向20世纪的另一座地标建筑：西班牙毕尔巴鄂市的古根海姆博物馆，继续讲述建筑材料、技术和设计之间的联系．

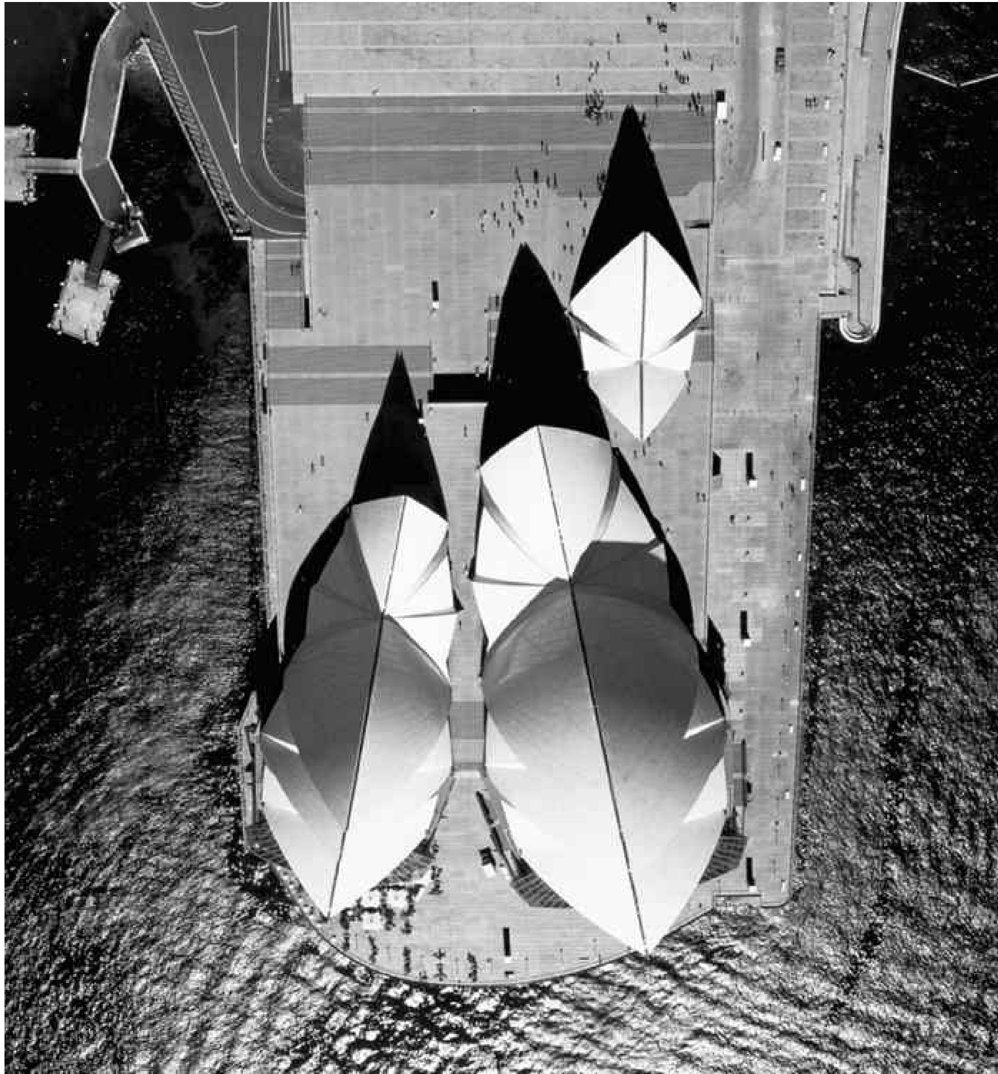


图**6-47**　主厅、副厅及餐厅的拱形屋顶．**David Messent**摄．选自《建筑杰作：悉尼歌剧院》（***Building a Masterpiece: The Sydney Opera House***），**Anne Watson**著，**Lund Humphries**出版，**2006**，**p176**．马昆德艺术考古藏书室

6.5　计算机、CAD、CAM及毕尔巴鄂的古根海姆博物馆

让我们先退一步，根据前面所学的知识，思考一下现在对传统建筑实践的有什么显著印象. 在建造大型复杂建筑之前，建筑师需要先提供详细的描述. 他们必须与工程师一起证明建筑物的结构合理，能经受极端天气和地震的考验，即使时间流逝也依然能达到这些要求. 建筑师和工程师需要确定建筑的内部空间，其中的人流、照明、采暖和音响条件都要达到预期. 建筑过程的目标是给出各种不同的表现方法和提案，根据相关证据对它们进行分析，最终将所选取的明确的表现方法转变成原比例的物理实物. 必须要考虑建筑物的功能、尺寸、形状，施工的可行性、材料、方法，预算及竣工和居住时间等基本变量.

传统上，建筑师依靠欧几里得几何学给其想法赋予形状. 他们用钢笔、直尺和圆规在纸上画出点、直线、平面、圆弧和球面，从而创造出他们的设计. 在木匠和石匠按原比例将其实现后，这些平面构图就转化为建筑物. 砖是矩形，砌在一起就形成线或直角. 它们一层层平铺，就变成了平面墙. 最容易用锯实施直线切割，得到平坦表面. 通过拉伸、旋转绳子或用铅垂线，指导建筑物实现直线形或拱形. 正如哥特时代尤其是米兰大教堂的故事（第3章）所说明的，要根据基本几何学规律考虑结构稳定性，并根据随时间累积的经验进行方案调整. 总之，建筑师依靠基本的欧几里得几何工具来绘制他们所能建造的，并建造他们所能绘制的. 建筑物由木、石、砖和灰泥建成，而这些材料由人和驮畜拖动的简易杠杆、升降机、起重机运送到指定位置. 几千年来，人类就是这样修建他们的建筑物. 这也是本书前5章所讲述的内容.

工业革命及随之而来的技术革命改变了这一进程. 它提供了新的建筑材料，包括铁、铸铁、钢和钢筋混凝土，发明了由蒸汽、柴油和电驱动的起重机和悬臂吊车，提出了评估结构稳定性的新方法，包括材料检测和结构工程上的数学方法. 所有的这些成就都使建筑师扩大了他们所能建筑的范围. 6.1节描绘了其中的一些方面. 19世纪末到20世纪初，内部有机械和电力设施（照明、暖气、空调和最重要的电梯）的大规模、高复杂度的建筑物，包括摩天大楼在内已经很常见了. 但是，传统的作图工具，如刻度尺、丁字尺、平行线尺（用来快速绘制平行线）、量角器（用来划分角）和坐标纸（上有矩形栅格）仍然是建筑行业使用的工

具．结构工程师清楚复杂的分析方法，但仍要用简单的公式、表格、经验数据、计算尺和经验法则处理大部分稳定性问题和建筑物性能．

这就是约恩·乌松当初为悉尼歌剧院大赛绘制其设计时面临的情况．他用粗的软铅笔画出了形状，找到了弯曲的帆形屋顶结构的节奏．他的助手用传统的绘图工具、标准的画法几何技术和硬尖铅笔将其想法转化为蓝图和施工图．乌松的设计不是上面罩上半球形拱顶的一些盒子，而是一座史无前例的自由流动的大型雕塑．正如我们在前面一节所见到的，用预应力混凝土和玻璃将其构想转化为能够建造的结构是一项艰巨又旷日持久的工作．从1957~1962年，乌松和阿鲁普试验了不同的拱顶几何形状，想要找到一种可行方案．他们探讨了单层混凝土壳、双层混凝土壳、以钢桁架承重的混凝土壳以及抛物线和椭圆几何形状．每提出一种新方案和几何形状（在从同一个球面切割所有壳并用从基部呈扇形展开的混凝土拱肋进行建造的灵感产生之前），都必须根据力、挤压力及偏转评估其结构稳定性．这项任务的第一步是找到壳表面的精确的数学描述（正如第4章对圣索菲亚大教堂的球心穹顶所做的那样）．完成这项工作后，基本上就能进行必要的计算了．

现在来到了最难的部分．阿鲁普及其团队意识到这些计算需要的计算机能力远远超过了人们所能提供的．20世纪50年代初，第一台电子计算机进入商业领域，但能进行壳分析的强大计算机当时还处于开发阶段，所需要的数学算法也正在整理之中．首先要做的是用矩阵表示壳上单点处的应力或偏移．（矩阵是矩形排列的数字．讨论3.1用简单的例子来表现图案的排列和对称变换．）要表示整个壳上的应力和偏移需要大型系统矩阵．求解这些系统的指令需要用程序员和计算机能够处理的方法表示．这些程序接口和语言也只是刚被创建，不时会根据所构想的几何体的传统素描推出一些必要数据．一些用于具体分析的数据会以一长溜小孔的形式打在细长的卷纸上．核查完这些小孔并为了保证精度再核查一遍后，纸带就被放进计算机内并由其“读出”．阿鲁普能获得的计算机的存储容量约为今天个人电脑的百万分之一，现在个人电脑需十几秒完成的计算，它却要花上十几个小时．每次考虑壳的一种新几何形状时，之前所做的技术分析就没有用了，必须舍弃．此时就要修改软件，重新编制计算机程序，整个过程又重新开始．

阿鲁普及其团队小心地对待计算机得出的结果．“如果你不知道答案的数量级（换言之，如果你不知道答案可能是什么），就不要使用计算机”的忠告指导着他们．阿鲁普的工程师也依靠对壳的塑料和木制模型

的测试来估计力和应力的分布．图6-48展现了其中的一个结果．即使他们使用的计算机性能极小，数学算法只得到初步发展，它们对大型帆形壳的结构评估也是不可或缺的．事实上，没有计算机技术，乌松创造性的壳不可能有出头之日．

如今，计算机技术的发展已经使这类分析程序化了．计算机辅助设计（CAD）基本系统是传统绘图工具的精确、高效版本．它提供基本的绘图组件，如点、直线、圆和椭圆．通过在计算机屏幕上进行拷贝、剪切、粘贴、拖拉、网格对齐、缩放、剪裁等操作，对这些组件进行组合及修改，可以很容易得到复杂的设计．（本书中的大部分图形都是用Adobe Illustrator这类系统获得的．）20世纪60年代至70年代早期，计算机科学家开发出用诸如NURBS这样的系统对曲面进行数字建模的新软件．后期使用的样条（NURBS是非均匀有理B样条，即nonuniform rational B-splines的缩写）是由多项式分段定义的专用数学函数．这种曲面CAD系统已成为汽车、飞机和轮船设计的基本工具．娱乐业也使用这种软件来创建卡通人物，并在二维和三维动画中赋予它们生命．日益提高的计算机性能以及日益复杂的显示技术让设计师能在计算机屏幕上完成自由形式的曲面，不管是静止的还是移动的，就像传统建筑师在纸上完成线、面、圆、圆柱和球一样容易，甚至更容易．

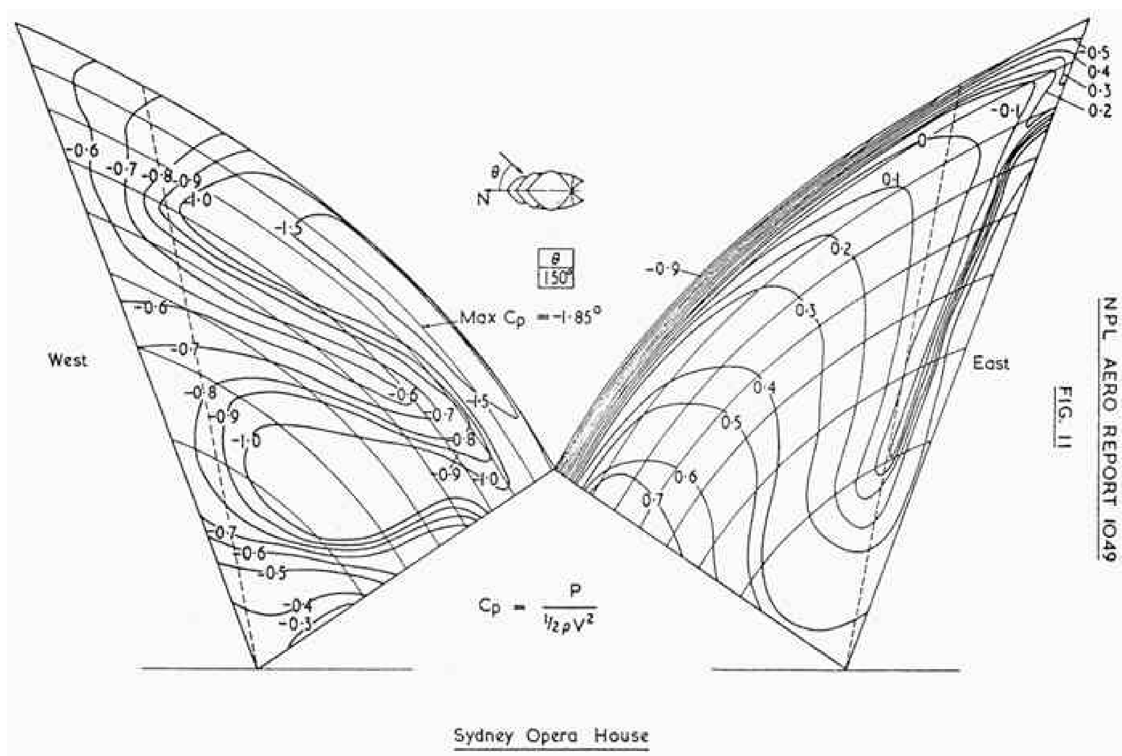


图**6-48**　壳**A2**的压力分布，得自壳模型的风洞试验．选自《乌松的球体：悉尼歌剧院**——**它的设计和建造方法》，**Yuzo Mikami**著，**Osamu Murai**摄，**Shokokusha**出版，东京，**2001**，**p312**．普林斯顿大学图书馆，马昆德艺术考古藏书室

20世纪90年代初，建筑师弗兰克·盖里（1929—）和他的团队首先将建筑实践与数字设计领域联系起来．1992年奥林匹克运动会召开之际，他受委托在巴塞罗那码头塑造的不朽的鱼雕塑（1989~1992）是开创性的项目．过去为航空工业开发的CAD系统对它的流线型曲面进行数字建模，并进行设计开发及结构分析．它还产生了之前由传统绘图给出的施工所需的详细文档．巴塞罗那鱼雕塑为把成功的数字曲面建模应用到盖里后期更大的项目，如毕尔巴鄂的古根海姆博物馆（1991~1997）和洛杉矶的迪士尼音乐厅（1999~2003）做好了准备．

在设计和建造具有历史意义的毕尔巴鄂博物馆时，盖里采取了如下步骤．纸上的曲线素描和模型上的曲面塑形让他能自由表达他的初始想法．为了探讨它们，他徒手制作了许多大型的物理模型．他用先进的数字转换器捕捉比较重要的模型的顶点坐标、边及其他表面元素．通过诸如NURBS这样的软件，有可能设计出这些模型的三维数字版，可以表达出流线形状的微妙之处以及彼此间的细微差别并达到极大的精度．而后，由计算机控制的三维打印机和多轴铣床就会产生新的物理模型．将它们与原来的设计相比较，对其形状进行修正和调整，直到设计团队对它们之间的匹配程度感到满意．汽车的设计人员也使用同样的策略．他们将用毡尖笔徒手绘制的素描、小心捏塑的粘土模型与先进的计算机仿真相结合，完成其设计．

此时，计算机方法的突出优势变得很明显．回忆阿鲁普及其团队在估计给定壳的几何形状对其穹顶结构属性的影响时遇到的困难．对每种几何形状，挤压力、张力、偏移和旋转力的计算都需要一套庞大的新数据、重新配置的软件版本以及新的漫长的计算机分析．而这些用现今的几何建模系统和快速计算机很容易就能实现．FEM（Finite Element Method，有限元方法）的思想是用平面区域近似估计表面，是其中的关键技术．将三角形构成的二十面体内接到球体内（参见讨论4.1和图4-45(e)）从而对其进行估计的方式可以让人初步感受一下上述方法．增加线性结构与表面间的接触点数目会提高估计精度，但却增加了需要求解的方程组中的方程个数．事实上，这类方程组现在可以用高性能计算机迅速求解，从而使FEM能精确、高效地分析复杂结构的物理性质．通过

使用FEM，可以对结构的弯曲和扭转进行仿真，将应力分布和位移用视觉呈现，研究结构内部及四周的气流、热条件的影响以及声响品质．使用这种技术可以在建造前对设计进行数字化分析、完善和最优化．

盖里在最终确定毕尔巴鄂古根海姆博物馆的设计方案并弄清其性能特性后，就开始施工了．这一过程得到了计算机辅助制造（CAM）的协助．正如激光打印机自动将文本文件翻译并转换成打印纸输出一样，CAM制造机械将三维数字文件转化为原尺寸的实物．这一工作可以高速完成且精度几乎丝毫不差．数字控制的激光切割机、水射流切割机和刨槽机能把平面材料高效地切割、塑形并转变成复杂的形状．多轴铣床更进一步发展为计算机控制的三维构件制造．通过这些步骤，CAM技术竖立起博物馆复杂的大型钢主框架结构，它分为几个3米见方的模块．该框架的抽象几何图形并不是对称的，也没有重复，但还是要求有很高的精度．古根海姆博物馆的钢主框架结构和外部表面之间有好几层．内层由镀锌钢管制成，按水平梯形图案排列，确立了外层的水平曲线．该层用可以向各方向调节的接头与主结构相连．另有一层承载着镀锌钢盖板，它的内侧铺着保温层，外侧有沥青防水薄膜．它确定了外部的垂直曲线．主结构和这些层可以根据温度情况而胀缩．建筑外表面多数都含有钛板．钛经过化学处理，由CAM机切割成平板．工人现场弯曲或扭动这些板子，将它们安装到弯曲结构上并进行连接．镀钛区中的80％只需要4种标准尺寸．剩余的20％需要16种不同的板子．流线形的钛板赋予博物馆如雕塑一般的复杂外形．（钛的成本高，但碰巧的是，就在要用它来施工的时候，世界上最大的钛产地俄罗斯将数量庞大的钛投放到市场上．这样就以难以想象的低价购买了所需要的所有钛．）外部也有大量的石头表面以及钢和玻璃墙．它们都在三维计算机控制的CAM机的协助下制作完成．建筑材料的装配得到以三维解析几何为原理的激光定位设备的帮助，由计算机驱动的机器人完成．施工过程中共使用了25084平方米的钛，6132平方米的玻璃以及3.4万立方米的石灰石．其成本为1亿美元，建设时间为6年，二者都没有超过大博物馆的标准．

1997年，毕尔巴鄂的古根海姆博物馆向公众开放，很快被评为世界上最壮观的建筑之一．图6-49展示了这座开创性建筑的外貌．建筑师菲利普·约翰逊称其为“我们这个时代最伟大的建筑”．“毕尔巴鄂效应”促进了该城部分地区的新生，使毕尔巴鄂成为地图上的旅游胜地．



图**6-49**　毕尔巴鄂古根海姆博物馆（**1991~1997**）．**Ardfern**摄

约恩·乌松的悉尼歌剧院和弗兰克·盖里的毕尔巴鄂古根海姆博物馆都成为让公众神往的地标性建筑．然而乌松不得不依靠手工绘制的素描及手制的模型来探讨其视觉、空间和结构效果，而盖里能调用可视化软件来产生，甚至几乎立刻就产生他需要的任何场景和信息．悉尼歌剧院精妙的球体方案便于施工，建成的壳外形优美，但它们的几何形状却比乌松最初构想的满帆形要呆板和生硬．盖里设计的毕尔巴鄂古根海姆博物馆则是自由生动的雕塑形状，在那时，这类形状的精确分析和施工都已不成问题．建筑恰如现代艺术，如今能创造、探索并追求几乎任何能想象到的形式．补充一点，有趣的是伦敦的阿鲁普合资公司现已成为世界领先的工程公司之一，率先使用了一些使上述功能得以实现的CAD/CAM/FEM技术．

6.6　问题和讨论

接下来的问题和讨论处理本章出现的各种数学问题.

问题**1**　圣保罗大教堂穹顶和美国国会大厦的规模相近．研究这两个穹顶的基 础结构配置，图6-2中的圣保罗大教堂、图6-8和图6-10中的美国国会大厦的截面图都对它们进行了描述．比较这两座穹顶的重量，讨论穹顶上的力和应力以及它们的主支撑结构.

在6.2节中，讨论绳子和重物系统的目的是假设给定力 R_1 和 R_2、重物 W_1、W_2 和 W_3 及它们之间的垂直距离，确定绳子段的准确外形及它们上面的张力．问题2~问题7继续讨论这类系统．单位长度和单位重量给定.

问题**2**　绘制（仔细地用直尺和圆规）与图6-20(c)和图6-20(d)中的力多边形图相对应的索多边形.

问题3和问题4基于图6-50(a)．该图展示了在*A*点的力 R_1，*B*点的力 R_1 及其携带的重物*W*作用下的绳索*ACB*.

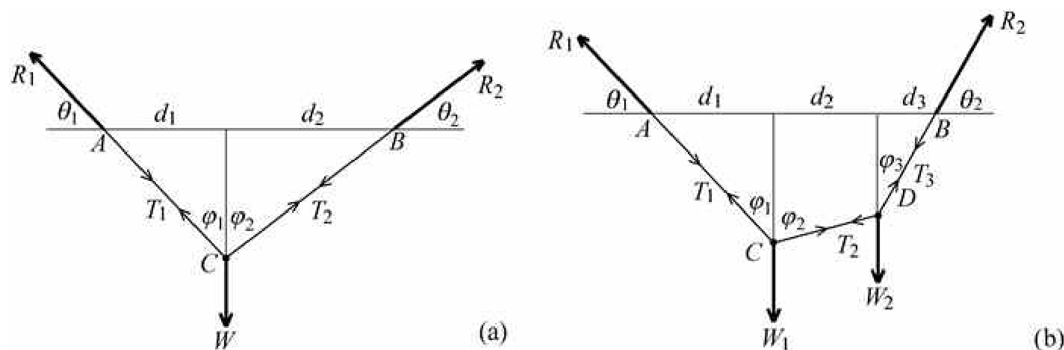


图　**6-50**

问题**3**　设 $d_1 = 4$、 $d_2 = 6$ 和 $\theta_1 = 45°$．确定两段绳子*AC*和*CB*的长度．假设 R_1 和 R_2 的水平分量的大小都是75，计算重量*W*、张力 T_1 和 T_2 .

问题**4**　假设 $d_1 = 4$、 $d_2 = 6$，且绳子段*AC*=8．计算绳子*ACB*的长度及 θ_1 和 θ_2 的正弦及余弦．设*W*=100，确定力 R_1 和 R_2 的大小.

问题5和问题6基于图6-50(b)．该图展示了在A点的力 R_1，B点的力 R_2 及其携带的重物 W_1 和 W_2 作用下的绳索$ACDB$．

问题**5**　设$\theta_1 = 45°$、$\theta_2 = 60°$、$d_1 = 4$、$d_2 = 4$、$d_3 = 2$、$W_1 = 200$ 和 $W_2 = 150$．确定力 R_1 和 R_2．计算张力 T_1、T_2和 T_3．认真绘制此时的力多边形．

问题**6**　设 $d_1 = 4$、$d_2 = 4$、$d_3 = 2$，点C和点D分别在线段AB下方5和4个单位．计算绳子$ACDB$的长度．假设 $W_1 + W_2 = 450$，计算张力 T_1、T_2和 T_3，以及 W_1 和 W_2．

有负载的绳子（例如图6-15中的）的图形建立在假设力及受力的绳子互相平衡的基础上．任何一组使 $W_1 + W_2 + W_3$ 得的大小等于 $V_1 + V_2$ 的重物 W_1、W_2和 W_3 及向上的垂直力 V_1 和 V_2，以及彼此大小相等的水平力 H_1 和 H_2，共同确定一个力多边形．不过，如果预先分配A、B之间的水平距离 d_1、d_2、d_3和 d_4，以及重物，有可能不存在满足给定的力和距离要求的处于平衡状态的绳子．下面的问题验证了这一点．

问题**7**　图6-15所示的绳子和受力系统处于平衡状态．重物 W_1、W_2 和 W_3 分别为100磅、150磅和125磅．R_1 和 R_2 的垂直分量大小分别为175磅和200磅，水平分量为150磅．用长度为x英寸的向量代表 $100 \times x$ 磅的力，用直尺和圆规画出该系统的力多边形．设点A、B和重物之间的水平距离分别为 $d_1 = 1$ 英尺、$d_2 = 2$ 英尺、$d_3 = 1.5$ 英尺，但 d_4 目前尚不确定．用长度为x英寸的线段代表长度为x英尺的绳子，按比例画出这一绳子系统（还是使用直尺和圆规）．则距离 d_4 应为多少？绳子的总长度为多少？

克里斯托夫·莱恩对拱券所做的研究包括图6-51．该图考虑半拱DAC及其支撑墩柱$AFGB$．点N和M分别是半拱和墩柱的质心．

问题**8**　莱恩一度认为如果墩柱绕点B产生的力矩超过半拱绕B点产生的力矩（且如果该拱券的另一半也是这样），则该拱券稳定．评估这种关于拱券稳定性的观点．

问题**9**　图6-52展示了受到力作用的两根梁．每根梁都固定在A点，F为

力的大 小，d为从A到力的作用线的垂直距离，θ为该直线与梁之间的夹角．图6-52(a)中， $F = 800$ 磅， $d = 10$ 英尺， $\theta = 50°$．为什么力F绕A点的力矩等于8000(磅-英尺)？将该作用力分解成垂直和平行于该横梁的分量．讨论每个分量的作用，再次计算力矩．对图6-52(b)重复上述分析，其中 $F = 1200$ 磅， $d = 8$ 英尺， $\theta = 60°$．

问题**10**　回顾库仑在6.3节中对铰合的研究．重点关注点a，解释如果 $H_{y1} - W_\alpha x_1 \le (\tau_\alpha A_\alpha) z_1$，为什么$a$点没有铰合损坏．为什么 $H \leqslant \frac{W_\alpha x_1}{y_1}$ 是a点没有铰合损坏的充分条件？为什么如果 $H \le G_1$，则沿拱券外边界任何地方均没有铰合损坏？

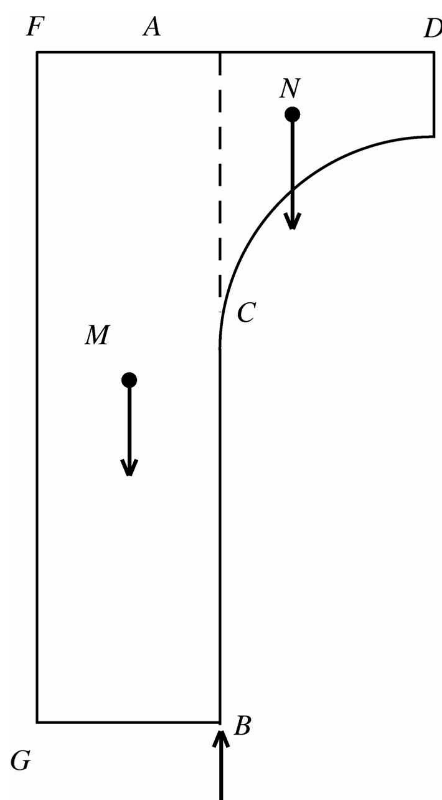


图**6-51**　选自**Stephen Wren**的《根源》（***Parentalia***），伦敦，**1750**

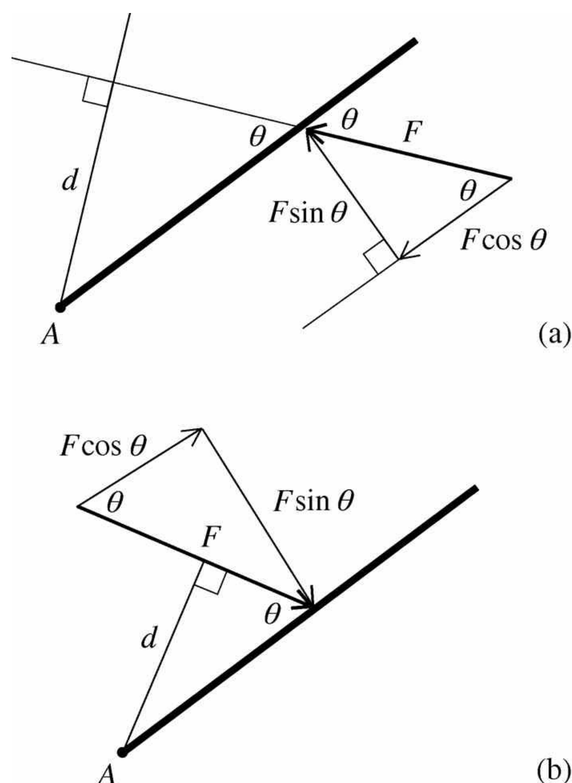


图**6-52**　力矩图

下面的3个问题研究阿鲁普为悉尼歌剧院墩座设计的大广场梁的几何形状．参照图6-35和图6-36，回忆图6-38，该图给出了x（$0\le x\le 2b$）取任意值时梁的横截面．问题11使用的长度单位为英寸，问题12和13使用的长度单位是英尺．这些问题的解答要用到4.3节和4.4节中的知识．

问题**11**　从图6-35中可以注意到，随着x从0增加到b，梁的横截面从U形变到V形再到T形．该图指出V形在$x=\frac{b}{2}$处出现．图6-38给出的横截面的精确描述能确定这一点吗？

i. 取英尺为长度单位，用图6-38的数据，验证该图的yz坐标系中，$A=(28,54)$、$G=(7,54)$、$F=(29,7)$、$B=(7,7)$．

ii. 用$\cos\alpha=\frac{AG}{2r}$和$\sin\alpha=\frac{BG}{2r}$证明$r\cos\alpha=\frac{21}{2}$及$r\sin\alpha=\frac{47}{2}$．

iii. 验证点$D=(y,z)$的坐标为$y=\frac{21}{2}(1+\cos\theta)+7$和$z=\frac{47}{2}(1+\cos\theta)+7$．

iv. 证明线段GD和FD的斜率分别为 $\frac{-47(1-\cos\theta)}{21(1+\cos\theta)}$ 和 $\frac{-47(1+\cos\theta)}{23-21\cos\theta}$.

v. 证明当大广场梁的横截面呈V形时，角度θ满足$\cos\theta=\frac{1}{43}$．证明这对应于$\theta \approx 88.67°$．推出V形出现在 $x \approx 0.493\,b$ 处（接近但不等于$\frac{b}{2}=0.5b$）．

问题**12**　图6-38中，yz平面内D的位置与x有关，而对任意x，点A、B的y坐标和z坐标都相同．验证图中yz平面内有$A=(\frac{28}{12},\frac{54}{12})$，$B=(\frac{7}{12},\frac{7}{12})$，这两点确定直线$z=\frac{47}{12}y-\frac{26}{36}$．根据 $DB = r(1 + \cos\theta)$，计算出$AD=r(1-\cos(\frac{180}{b}\times x))$.

问题**13**　参照图6-37中的xyz坐标空间．问题12告诉我们图6-38中$A=(0,\frac{28}{12},\frac{54}{12})$和$B=(0,\frac{7}{12},\frac{7}{12})$，它们均位于方程$z=\frac{47}{12}y-\frac{26}{36}$所确定的平面内.

i. 对任意满足 $0 \le x \le 2\,b$ 的x，为什么确定大广场梁几何形状的点D位于平面 P内？

ii. 在平面P内建立uv坐标系．坐标系的原点为点$(0,\frac{28}{12},\frac{54}{12})$，长度单位为英尺．$u$轴与$x$轴平行，其正半轴与$x$轴正半轴的方向相同．$v$轴垂直于$u$轴，位于平面$x$=0（即图6-37中的$yz$坐标平面）内，要求点$B=(0,\frac{7}{12},\frac{7}{12})$在$v$轴正半轴上，以此确定$v$轴正半轴的方向．在图6-37中的$xyz$空间内画出这两个坐标轴.

iii. 考虑函数$v=f(u)=r(1-\cos(\frac{180}{b}\times u))$，其中$u$位于区间$0 \le u \le 2\,b$内．讨论该函数的图形与$uv$平面$P$内$D$点的位置变化之间的关系．根据$u$坐标等于

0、$\frac{b}{4}$、$\frac{b}{2}$、$\frac{3b}{4}$、b、$\frac{5b}{4}$、$\frac{3b}{2}$、$\frac{7b}{4}$的点，画出函数$v = f(u)$的图形．

讨论**6.1**　高迪的华丽风格　西班牙建筑师安东尼·高迪（1852—1926）建造了奢华的结构，将传统砌筑材料推进到新的极限．他的经典作品是巴塞罗那的圣家族教堂．它飞升的穹顶和尖塔兼具俏皮、超现实和激动人心的特点，是对哥特式风格的一种新诠释．高迪的设计基于对复杂的加载绳索系统的认真和仔细研究．图6-53展示了他的其中一张素描，图6-54展示了他的其中一个模型．他从各个角度拍摄所制作的模型，并将其用来设计图6-55中拱形结构的起拱形式．大教堂从19世纪80年代至现在一直在断断续续进行建设．如今高迪使用过的一些砂岩出现损坏，因此维护和施工同步进行，新的施工中使用了与原先砂岩相似的合成砂岩．圣家族教堂计划在2030年完工．目前已建成的细尖塔高约101米，但与高迪设想的171米高的中央尖塔相比，它们只不过是一些小山而已．高迪的建筑作品以其风格、形式的多变以及对色彩的使用而引人注目．他所构想的几何形状复杂、自由并富有表现力．

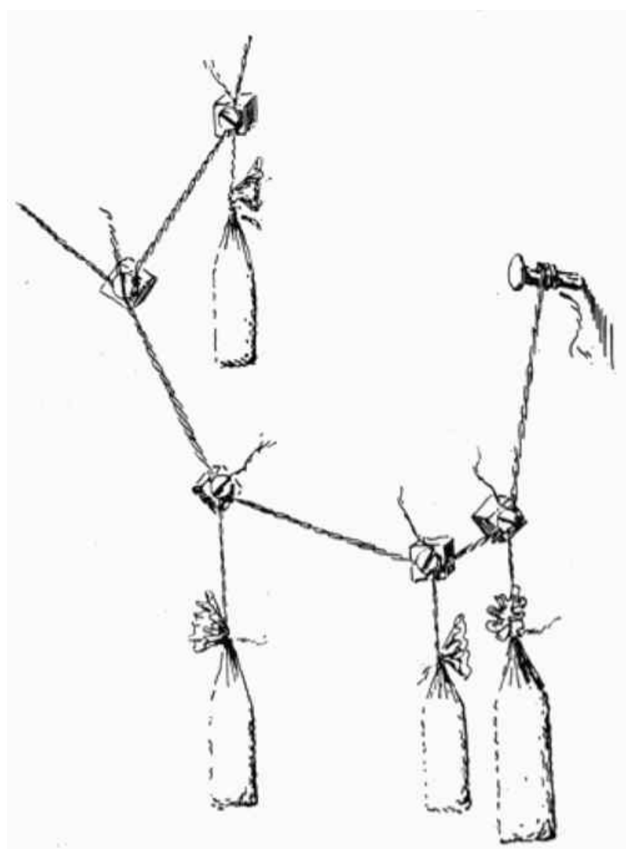


图**6-53**　高迪的一幅素描

讨论6.2　乌松的三角形与测地三角形　回顾6.4节，乌松设计的壳中所有的三角形都取自半径为246英尺的球．图6-56是对图6-45(b)修改后得到的，它展示了壳A2及其拱肋结构．它的两个圆弧形边延长并相交到A点，其夹角为α．图中曲面三角形上的点B和C的垂直高度分别约为220英尺和86英尺．



图**6-54**　高迪设计的有负载时的绳子分布模型，**Cleftref**摄



图**6-55**　圣家族大教堂的一些拱形结构，**Sarika Bedi**摄

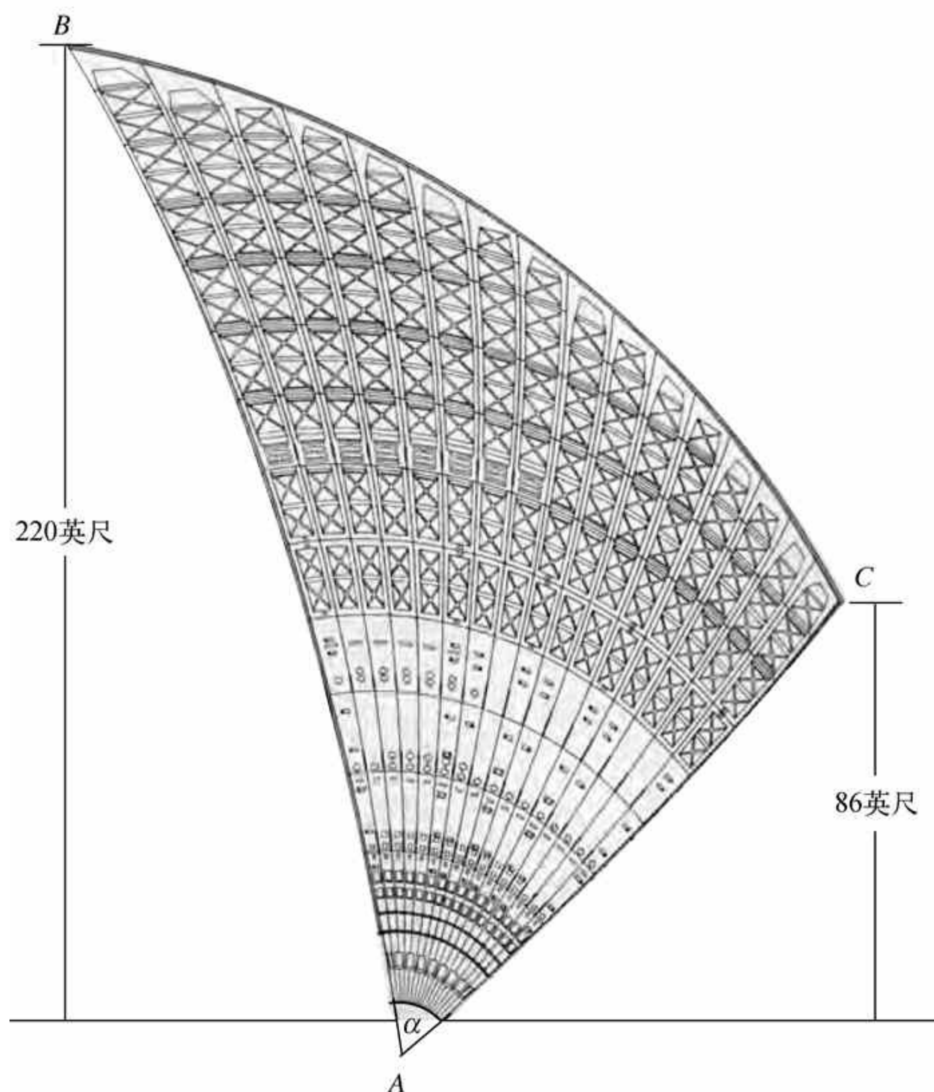


图**6-56**　壳**A2**的三角形

问题**14**　用壳的拱肋结构的相关知识证明角α等于 58.4°.

平面与球相交会得到一个交点或一个圆．如果该平面经过球心，则称该圆为大圆．大圆的半径与球的半径相等．

问题**15**　考虑球面上的两个不同点P和Q．解释为什么存在一个大圆，使P和Q都位于其上．为什么这样的大圆只有一个？为什么大圆上P和Q之间的路径是球面上P和Q之间的最短路径？【提示：最短路径必然在过P和Q点的平面上．】

我们从与图6-41相关的讨论中可知，图6-56中的两段弧AB和AC都在半径

为246英尺的球的大圆上．图6-57绘出了大圆上的两段弧及它们所对应的角 φ_B 和 φ_C .

问题**16**　参照图6-57(a)和图6-57(b)，验证 $\sin\varphi_B \approx 0.893\,4$ 和 $\sin\varphi_C \approx 0.349\,6$ ．据此推出 $\varphi_B \approx 63.42°$和 $\varphi_C \approx 20.46°$．用这一结论推出弧*AB*和*AC*的长度分别约为272英尺和88英尺．

球面上3条边均在一个大圆上的三角形称为测地三角形．（单词geodesic有希腊词根，geo意为“地球”，daiesthai意为“分开”．）

问题**17**　图6-41中，在何种假设下，△*ABC*是球面三角形？图6-43的哪个地方告诉我们图中的三角形A1、A2、A3和A4都不是测地三角形？

几个基本性质会有助于我们理解测地三角形．在表述它们之前要先定义角的弧度．它的定义可以由图6-36给出．设θ为一个角，将其放在半径为R的圆内，使它的边在圆心处相交．如果x为角θ所切割的圆周弧长，则角θ的弧度为比值 $\frac{x}{R}$．（不管圆的半径R为何值，这个比不变．）例如 180°、 90°、 45°角的弧度分别为 $\frac{\pi R}{R}=\pi$、 $\frac{\frac{1}{2}\pi R}{R}=\frac{1}{2}\pi$、 $\frac{\frac{1}{4}\pi R}{R}=\frac{1}{4}\pi$．

现转到图6-58．它描绘了球心为O、半径为R的球上的一个普通测地三角形．三角形的边在顶点处所确定的夹角分别记做α、β和γ．这些角的相对边长度分别为a、b和c．该图展示了连接球心O和3个顶点的3条半径．可以看到每两条半径在O点的夹角的弧度分别为$\frac{a}{R}$、$\frac{b}{R}$和$\frac{c}{R}$．

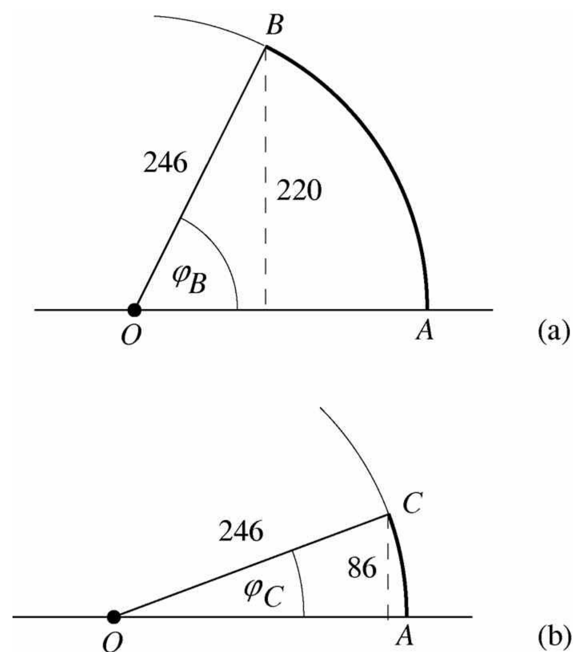


图**6-57**　壳**A2**沿两个大圆的横截面

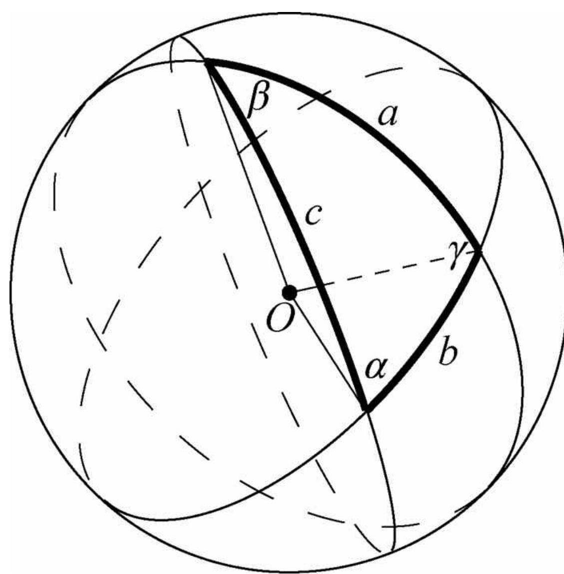


图**6-58**　球面三角形

吉拉尔定理（艾伯特·吉拉尔是16世纪的法国数学家和专业鲁特琴演奏家）给出测地三角形的面积为

$$R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

从该公式可得，测地三角形的内角和总是超过 180°．测地三角形满足正弦定理

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{a}{R}}=\frac{\sin\beta}{\sin\frac{b}{R}}=\frac{\sin\gamma}{\sin\frac{c}{R}}$$

以及两个余弦定理

$$\cos\frac{c}{R}=\left(\cos\frac{a}{R}\right)\left(\cos\frac{b}{R}\right)+\left(\sin\frac{a}{R}\right)\left(\sin\frac{b}{R}\right)(\cos\gamma)$$

和

$$\cos\gamma=-(\cos\alpha)(\cos\beta)+(\sin\alpha)(\sin\beta)\left(\cos\frac{c}{R}\right)$$

参照第2章的问题14和问题15，将这些定律与平面内三角形的正余弦定理相比较．

考虑*xyz*坐标系，参考4.4节．取球 $x^2+y^2+z^2=R^2$．注意它的球心为原点，它的半径等于*R*．重点注意*xy*坐标平面上部的半球．可参照图4-26．用*xz*坐标平面以及由方程*y*=*x*给出的垂直平面切割该半球．这两个平面确定了半球上的一个测地三角形．将其用*T*表示．

问题**18**　在*xyz*坐标空间内认真画出测地三角形*T*．

问题**19**　参考所绘制的*T*的图形，解释为什么*T*在*xy*坐标平面内的两个顶点处的角都等于 90°，为什么剩下一个顶点处的角为 45°．根据半径为*R*的球的表面积为$4\pi R^2$，证明*T*的面积为$\frac{1}{16}(4\pi R^2)=\frac{1}{4}\pi R^2$．验证这一点与吉拉尔所给出的面积公式结果一致．

问题**20**　参考所绘制的*T*的图形，解释为什么连接*O*和*T*位于*xy*坐标平面内的顶点的两条半径间的夹角为45°，为什么剩下的两对半径间的夹角都等于 90°．组织所能获得的信息，证明三角形*T* 满足正弦定理和两个余弦定理．

要在穹顶的曲面三角形壳上铺设瓷砖，乌松必须先知道需要用多少块．要解决这一问题，就要估计三角形的表面积．

问题**21**　简述与测地三角形有关的方法，乌松可以用它来估计壳A2的三角形面积．一旦你确认它是正确的，尽量给出细节．你的估计比实际面积大还是小？

微分几何学中有一条比较深奥的定理，可以使人们能够准确计算出乌松的三角形面积．这一学科用高等微积分方法研究曲面，其基石为1827年卡尔·弗里德里克·高斯（1777—1855）出版的杰作《曲面研究》（*General investigations of curved surfaces*）．讨论2.3中叙述了高斯对尺规作图的深刻见解．高斯对其他的几个领域也作出了重要贡献，包括数论、统计学、函数分析、地球物理学、静电学、天文学和光学．通常他与阿基米德和牛顿一起被认为是历史上3位最伟大的数学科学家．上面提到的深奥定理是指高斯-波捏定理．高斯创建了一个具体例子，约20年后，法国数学家皮埃尔·波捏（1819—1892）证明了更一般的情况．回到图6-41中的△ABC．令R（而非r）为球的半径．设α、β和γ分别为顶点A、B和C处的角的弧度，d为原点O到xy平面内一直线的垂直距离，该直线由过B和C的垂直平面确定．应用高斯-波捏定理，可知

$$\text{面积}\triangle ABC=R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)-\frac{d\times R}{\sqrt{R^2-d^2}}\times\text{弧}BC\text{的长度}$$

问题**22**　图6-41中的△ABC是特殊情况下的球面三角形．证明在该情况下，△ABC的面积公式可以简化为吉拉尔定理．

第7章　基础微积分及其在结构分析中的应用

几乎与贝尼尼完成罗马圣彼得广场的收尾工作及莱恩开始兴建新圣保罗大教堂同时，牛顿和莱布尼茨发明了微积分，这是一种强大且应用广泛的新数学．不过这两位天才所处的环境却天差地别．

艾萨克·牛顿（1642—1727）那时是一个20来岁的英国大学生，在剑桥大学因黑死病关闭后，他返回家庭农场．1665年和1666年，他凭借敏锐的洞察力和强大的专注力在家中独自工作．在这段短暂的时间内，牛顿阐述了运动物理学的基本定律，认识到它们适用于整个宇宙，发明了微积分，这门数学让他能对上述基本定律作出分析．他接着证明伽利略描述过的抛物线轨迹和开普勒记录的行星的椭圆形轨道不仅仅是观测到的现实，它们是基本运动定律的数学结果．他的早期作品曾使其陷入到与当时科学家旷日持久的争论之中，他把《自然哲学的数学原理》（*The Principia Mathematica*）的出版推迟到1687年．《自然哲学的数学原理》（和达尔文的《物种起源》）是迄今为止最重要的科学著作．

另一位天才是威廉·戈特弗里德·莱布尼茨（1646—1716），他是德国人，在他快30岁时，被派往巴黎代表其资助人（德国州的一位大公）从事外交活动．受一些巴黎知识分子的启发，他在1673~1676年间独立发明了微积分．相较于牛顿偏重于几何方法，莱布尼茨对该问题的处理更偏重于代数方法，他的符号表示也更清楚．莱布尼茨的工作对数学的发展产生了巨大影响．耶稣会牧师皮埃尔·伐里农（1654—1722）学习了莱布尼茨的微积分并用它改写了牛顿的《自然哲学的数学原理》．我们在6.2节中曾提过他对结构图形分析所作出的贡献．瑞士两兄弟雅各布·伯努利（1654—1705）和约翰·伯努利（1667—1748）也从莱布尼茨的作品中学习了微积分并将其拓展到新领域．约翰·伯努利用它研究悬链的数学形状．法国贵族罗必达侯爵曾雇佣约翰·伯努利教授新数学，随后将其所学的内容在1696年出版，作为自己的微积分课 本，即《无穷小分析》（*Analysis of the Infinitely Small*）．它是一本可以学习使用的微积分课本．伯努利的另一名学生瑞士人莱昂哈德·欧拉（1707—1783）成为18世纪最多产和最有影响力的数学家．让人难以置信的是，他的作品整理出版了多达70卷，这些作品促进了微积分的发展，拓展了

数学的新领域，将数学用来研究力学、火炮、音乐和船只（以及一系列其他内容）．欧拉引入的变分法是强大的有限元方法（FEM）的主要内容之一．有限元方法是现代工程学的极其重要的基础，已在6.5节简单讨论过．

就其在建筑结构分析方面的应用而言，需要重点注意的是，微积分不仅仅是求解相关问题的一种计算方法．它的核心解释与我们理解这类结构的一些基本概念相一致，还给出了认识这些基本概念的重要启示．这些概念包括体积、重量、力、力矩和质心．因此，微积分方法能为本书涉及的大量结构问题提供知识，这一点并不让人感到意外．

本章第一节分别单独回顾了基础微分学和积分学以及旋转体体积和曲线长度．第二节应用微积分估计圣索菲亚大教堂及罗马万神殿的穹顶壳的体积和重量．第三节将注意力转到对理想拱的详细数学分析上，所谓理想，是指重力完全与其对挤压力的反作用力相平衡．这类拱的形状由胡克提出的倒置均匀负载的悬链的方法获得．我们将研究圣路易斯的大拱门，人们认为它与理想拱密切相关．本章最后一节用微积分方法研究质心、力矩，分析库仑的拱券损坏理论（在6.3节讨论过）．

7.1　微积分基础

微积分领域分为两部分．其一是微分学，它考虑直线的斜率，围绕“如何求曲线的斜率”这一问题建立．积分学的要义是有组织地计算许多极小数的和．考虑某物体在某个系统中的作用，一般来说，很容易计算物体的点状粒子在系统中的影响．积分学提出这样的问题，即“如何把所有粒子的影响相加，从而得到整个物体的影响效果？”我们综述的最后考虑微积分基本定理．奇妙的是，它会告诉我们微分学和积分学，尤其上面提到的两个问题之间有何紧密的联系．

接下来对基础微积分的概述以下文的应用为目的．它是该论题的总结与回顾，而非学习微积分的教科书．我们很快会看到，微积分建立在4.3节研究过的同一坐标平面内．（我们将不会研究类似的三维或更高维微积分．）微积分围绕数学函数的概念进行组织．事实上，简单来说，微积分是对数学函数的研究．函数是指用一种明确、特定的方式把实数赋值给其他实数的法则．$f(x)=\sqrt{x^2+x}$ 给出的法则就是一个代数例子．函数的定义域是指用来定义法则（或使其有意义）的数的集合．在刚才提到的例子里，只有当实数x满足 $x(x+1)\geq 0$ 时，$\sqrt{x^2+x}$ 才能被定义，也就是说，它的定义域是所有满足 $x\geq 0$ 或 $x\leq -1$ 的实数x的集合．函数f的图形是坐标平面上满足 $f(a)=b$ 的所有点(a,b)的集合．如果函数的图形为一条连续的线，则该函数是连续的．所以连续函数的图形没有间断．

微分学　第4章我们已经讨论并计算过直线的斜率．现在我们讨论曲线的斜率，更确切地说是函数图形的斜率．已知函数 $y=f(x)$，一般情况下，$y=f(x)$ 图形的斜率将随着x的变化而变化，因此它不能只用一个数计算．我们将会看到可以用函数表示函数f的斜率，这个函数就是f的导数．

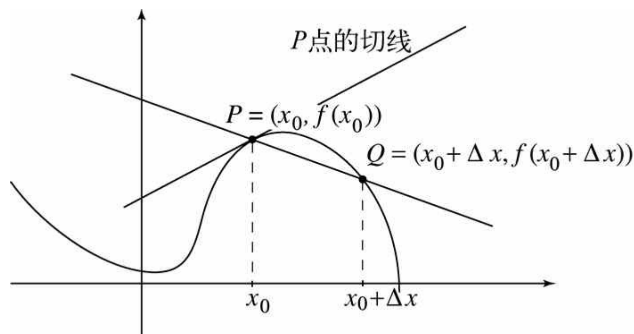


图　**7-1**

给定f的图形上的一点，可以将图形在该点的斜率定义为图形在该点切线的斜率．接下来的讨论将对此作精确表述．如图7-1所示，在x轴上取固定一点 x_0，设$\triangle x$为某个正数并考虑点$x_0 + \triangle x$（$\triangle x$也可以为负数，但这里我们只考虑其为正数）．设x_0和 $x_0 + \triangle x$ 之间所有点都在f的定义域内．重点注意图中点 $P = (x_0,f(x_0))$ 和 $Q = (x_0 + \triangle x,f(x_0 + \triangle x))$．沿该图形从$Q$到$P$，$x$坐标的变化量为 $\triangle x = (x_0 + \triangle x) - x_0$，$y$坐标的变化量为 $\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$．应用4.3节的讨论，这些变化量的比为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

正好是过Q和P点的直线的斜率．现保持x_0不变，让$\triangle x$趋于0，这样就使P点固定，Q趋于P点．参见图7-1，在这个过程中，过Q和P的直线旋转到图中点 $P = (x_0,f(x_0))$ 的切线上，这条旋转直线的斜率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$逼近切线的斜率．因为它与$x_0$有关，我们把该斜率记为 m_{x_0}.

上述切线在P点的斜率 m_{x_0} 的推导过程通常可以用极限的简化形式来表示，为

$$m_{x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

差 $\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$ 是函数f的图形的y坐标的变化量，它与其x坐标

变化量 $\triangle x = (x_0 + \triangle x) - x_0$ 相对应．所以比 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 是x从$x_0 + \triangle x$到x_0时该变化量的平均变化率．极限 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 是x_0处的y坐标变化率．

设x是f的定义域内的一点，对x重复上面对x_0的做法．现在考虑把x赋给m_x的法则．这样定义的函数称为f的导数，用f'表示．这个函数度量了f的图形斜率变化．如图7-2所示，给定它的法则为

$$f'(x) = m_x$$

其中

$$m_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

是f的图形在点$(x,f(x))$处的切线斜率．函数$y = f(x)$的导数也可以表示为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$．

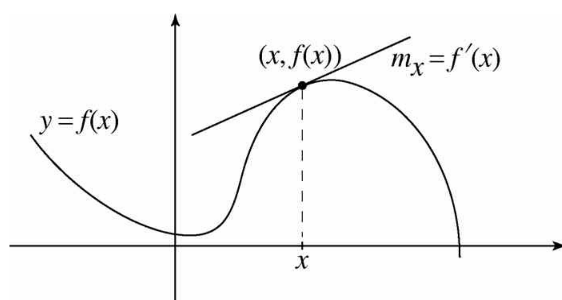


图　**7-2**

如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

存在，或者换言之，如果定义f'的法则对x有意义，则我们称函数f在x可

微，即f在x的导数存在．考虑上述过程的几何意义，你会发现如果$f(x)$的图形在点$(x,f(x))$处平滑，有一条非垂直的切线，则函数f在x点可微．对我们将考虑的所有函数，下面的内容同样成立，即如果f在x点可微，则$f(x)$的图形在点$(x,f(x))$处平滑，有一条非垂直的切线．（应当指出可以构造函数f及点x_0，使f在x_0可微，f的图形从左侧和右侧以越来越小的锯齿形图案趋近于$(x_0,f(x_0))$．数学家称这种函数为"病态函数"，其图形在$(x_0,f(x_0))$并不平滑．）

不同的法则如加、减、乘、除、乘幂和链式法则告诉我们（通常综合使用）如何计算函数的导数．例如，乘幂法则对任何常数指数r，有

$$f(x) = x^r \text{的导数是} f'(x) = rx^{r-1}$$

在工程学和物理学里，人们通常感兴趣的是研究相关数量的增长率、降低率并估计它们的最大值和最小值．其中一些问题可以用平滑变化的函数建模．这类函数可借用微积分进行分析．

函数的导数提供了一种方法，用来确定函数递增或递减的区间，也用来确定函数在何处达到极大值和极小值．它们用函数的图形表示，分别是指x轴上从左到右图形上升和下降的区间以及图形的高低点．考虑函数$y = f(x)$，已知c是满足f在c处可微且$f'(c)＞0$的一个数．这告诉我们f的图形在c处平滑，有一条斜向上的切线（非垂直）．因为这条切线在点$(c,f(c))$附近与f的图形紧靠在一起，所以当图形通过$(c,f(c))$时呈上升状态，如图7-3所示．类似地，如果$f'(c)＜0$，图形过$(c,f(c))$时下降．这些内容告诉我们如果在定义域上的一段区间$a≤x≤b$内$y = f(x)$的导数等于0，则在该区间内函数的图形既不上升也不下降，也就是说在该区间内函数图形是水平的．因此$f(x) = C$，其中C为常数，对所有x均满足$a≤x≤b$．

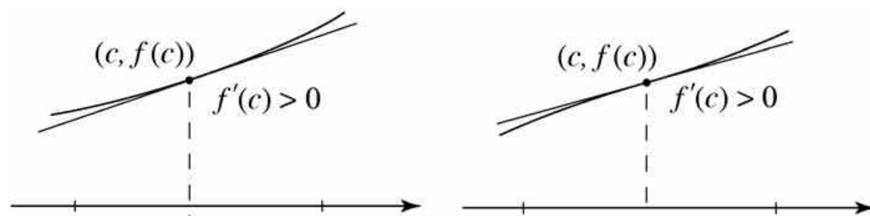


图　**7-3**

根据以上内容，可推出一个重要结论：

> 如果f的图形在$(c,f(c))$处有一高点或低点，则在c点，有$f'(c)=0$或$f'(c)$不存在（没有定义）.

满足$f'(c)=0$或$f'(c)$不存在的数字c称为函数f的临界点.

可以用上述事实来分析函数f的性质，方法如下．计算导数f'并确定的所有临界点．设$c_1 < c_2 < \ldots$是所有的临界点．f在c_1的左边处处可微，否则c_1的左边会有一个临界点．（实际上，不可能存在这样的点，因为c_1是第一个出现的临界点．）由于任何递增或递减转换点都将在c_1左侧产生临界点，因此对所有$x < c_1$，都有$f'(x) > 0$（故f递增）或者$f'(x) < 0$（故f递减）．由同样的推论可知，f在任何两个相邻的临界点之间可微，并且在它们之间的区间内单调递增或单调递减．用同样的方法可知，对右边最后一个临界点也有相似的结论．现在只剩下检查所有临界点c_1,c_2,…，确定f的图形中是否存在高点、低点或二者均不存在.

图7-4绘出了函数$y = f(x)$的图形，用图形解释了上述问题．数$c_1,c_2,\ldots$，c_9是临界点的全部集合．函数的图形在每个区间$x < c_1, c_1 < x < c_2, c_2 < x < c_3, \ldots, c_9 < x$上均平滑，且函数在这些区间内要么单调递增，要么单调递减．因为图形在c_1和c_2处到达尖点（故f在c_1或c_2均不可微），所以这两个点是临界点．因为图形在c_4和c_6处有间隙因而没有切线（故f在c_4或c_6均不可微），所以这两个点是临界点．因为图形在c_8处的切线是垂直的（故f在c_8不可微），所以这个点是临界点．因为图形在c_3、c_5、c_7和c_9处有水平切线（故在这些点导数等于0），所以这些点是临界点．注意图形在c_1、c_3、c_6和c_9处有高点，在c_2和c_7处有低点，在c_4处有“无底洞”．函数在c_1、c_3、c_6和c_9处有极大值，在c_2和c_7处有极小值.

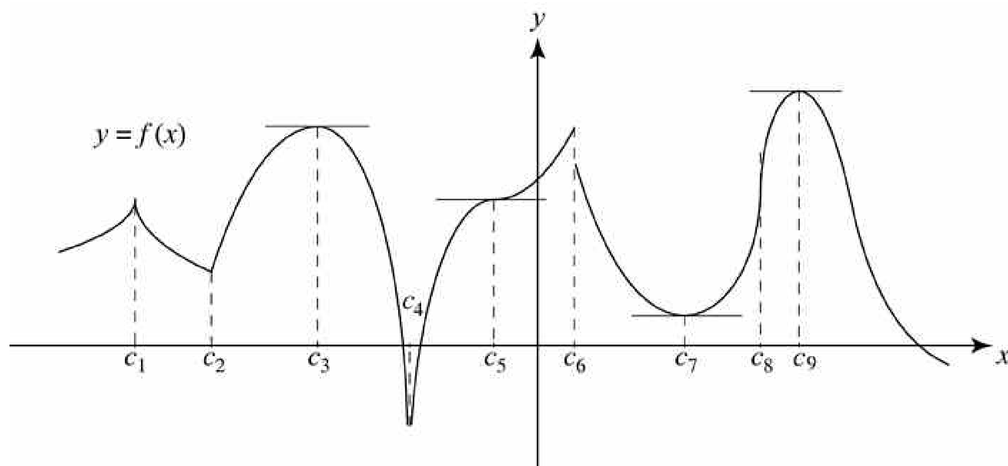


图　**7-4**

最后一个问题是关于函数的最大值和最小值．对上面提到的函数，存在一个最大值，只要比较$f(c_1)$、$f(c_3)$、$f(c_6)$和$f(c_9)$哪一个最大（可以看出$f(c_9)$最大）即可．然而因为在c_4处凹陷无底，没有最小值．将该函数的图形上下颠倒后（对应函数是$y = -f(x)$），得到一个只有最小值而没有最大值的例子．所以一个函数也许有，也许没有最大值或最小值．但有一种情况保证既有最大值，也有最小值．设函数$y = f(x)$的定义域包括区间$a \le x \le b$且函数在该区间上连续，则$y = f(x)$在$a \le x \le b$上既有最大值，也有最小值．

我们简单回顾了微积分中的导数，下面将回顾微积分中的积分．这是微积分这枚两面硬币中的另一面．

积分学　我们知道矩形的面积是什么及怎么计算它，我们也知道如何计算平行 四边形和三角形的面积．但如何计算一个平面曲边形的面积呢？这种情形下如何定义面积？你如何给定一个数作为其面积？这个问题的一个解决方法是使用笛卡儿直角坐标系．只要用非常细的垂直矩形填充该区域，它们的面积之和几乎等于曲边形区域的面积．矩形切片越细，近似程度越好．这种求面积的方法是定义定积分的开始．设a,b为常数，且$a < b$,满足$a \le x \le b$的所有实数x的区间记为$[a,b]$.

已知函数$y = f(x)$，假设f定义在$[a,b]$上且在$[a,b]$内连续，则它在这个区间上的图形是一条连续曲线，即为一条没有间断的曲线．

设n是一正整数，把区间$[a,b]$ n等分，每个子区间的长度是$\frac{b-a}{n}$．令$\mathrm{d}x=\frac{b-a}{n}$．将所有的分割点加在$a,b$之间，可以注意到每两个相邻分割点的距离是d$x$．参考图7-5所示的数轴．对其中一个典型分割点$x$（不等于$b$），紧挨着它的右分割点是$x$+d$x$．对$x=a$从开始到$b$之前的最后一个分割点为止的每个分割点$x$，都有乘积$f(x)\times \mathrm{d}x$．注意第一个乘积是$f(a)\mathrm{d}x$，最后一个是$f(b-\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$．下一步要把所有这些乘积加起来．把$n$个分割点记为

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n=b$$

则和为

$$f(x_0)\mathrm{d}x+f(x_1)\mathrm{d}x+\ldots+f(x_{n-2})\mathrm{d}x+f(x_{n-1})\mathrm{d}x=(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-2})+f(x_{n-1}))\mathrm{d}x$$

现把n取为一个与区间长度$b-a$相比极大的数，例如区间$[a,b]$的长度是5或7或20，则 n = 1 000 000 或 n = 5 000 000 就是极大数．如果区间$[a,b]$的长度是1 000，$n=10^{12}$（1万亿）或 $n=10^{14}$（100万亿）为极大数．n极大，则有非常多的分割点，两个相邻分割点的距离$\mathrm{d}x=\frac{b-a}{n}$相对于区间$[a,b]$的长度就极小．如果$n$极大，d$x$极小，我们定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

表示上面的和．符号∫是拉长的S，表示要求的是一个“长”和．把这样一个长和$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$称为$f(x)$从a到b的定积分．这时，先忘记你记得的与定积分有关的知识（后面将简单讨论它与面积、体积的联系），只把$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$看成是通过上面一系列步骤获得的小数的长和．

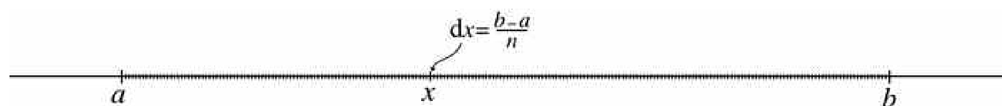


图　**7-5**

事实上，这个定积分的“初步”定义并不十分准确．上述求长和的过程只是真值$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的近似．这是因为无论你选择的n有多大，你总能找到更大的n，再重新构成长和．这一过程可以一而再，再而三地进行．$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的真值被定义为这个过程的极限．不过，我们再次强调：如果细分的数n足够大，上述长和基本上等于$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的真值，类似于11.999 999 999 9基本上等于12．

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$形式的和有很多不同的情形和解释．它们可以是面积、体积或曲线的长度．在物理学和工程学里，它们可以代表诸如力、能量、动量和力矩等基本概念．

我们下面来看定积分是怎么在面积计算中出现的．设有一连续函数f对所有x属于$[a,b]$，均满足$f(x)\geq 0$，则f在区间$[a,b]$上的图形位于x轴上方．如前所述，设n是一正整数，点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间$[a,b]$进行n等分，每个子区间的长度$\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}$．如果$x_i$是一典型分割点，则$\mathrm{d}x$是这个分割点到其右边分割点的距离．乘积 $f(x_i) \times \mathrm{d}x$ 是一高为 $f(x_i)$、底边长为$\mathrm{d}x$的细矩形的面积．i 的取值从0到n-1，所有用这种方法获得的矩形面积之和为

$$f(x_0)\mathrm{d}x+f(x_1)\mathrm{d}x+f(x_2)\mathrm{d}x+\dots+f(x_{n-2})\mathrm{d}x+f(x_{n-1})\mathrm{d}x$$

这些矩形如图7-6所示．图中为了区分这些小矩形，它们的颜色依次在黑色和灰色之间转换．该图选择的n较小，我们可以看到整个工作．不过现在假设相对于距离b - a，n极大．则矩形填满了区间$[a,b]$内f的图形之下的区域A．因此上面的和是对A的面积的一个近似估计，这个和也是$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的近似估计．考虑前面提到的极限过程，我们得出$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．

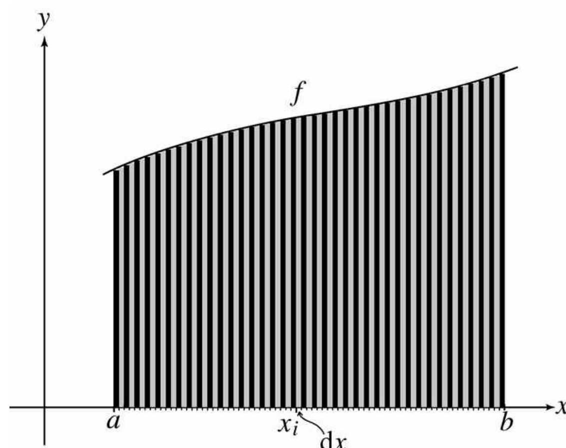


图 **7-6**

现在知道了数$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$意味着什么，我们将介绍一种方法，对它进行计算．哪怕最乐观的情况下，把无数个小数加起来也非常费力，而在最坏的情形下，这是不可能完成的．所以现在的问题是：这个数的计算有没有有效的方法？

给定一个连续函数f及在定义域内的区间$[a,b]$．F是一个导数为f的函数．因此对区间$[a,b]$上的所有x，均有$F'(x) = f(x)$，称函数F为f的不定积分．由导数定义得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)$$

也就是说，当x固定且Δx趋于0时，比值$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$趋于$f(x)$．因此，给定$x$和很小的$\mathrm{d}x$，$f(x)$和$\frac{F(x+\mathrm{d}x)-F(x)}{\mathrm{d}x}$非常接近．从极限的观点看，$\mathrm{d}x$越小，近似程度越好．因此

$$f(\mathrm{x})\mathrm{d}x \approx F(x + \mathrm{d}x) - F(x)$$

且$\mathrm{d}x$越小，近似值越好．$\mathrm{d}x$足够小，则两个值基本相等．

注意，这里我们同时使用了Δx和$\mathrm{d}x$，它们的差别是什么呢？我们使用Δx表示趋于0的数，用$\mathrm{d}x$表示具体讨论中固定的小数．

回到一般情况下的连续函数f及其定义域$[a,b]$、f的不定积分F和估计

$f(x)\mathrm{d}x \approx F(x + \mathrm{d}x) - F(x)$ 上．根据定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的定义，令n为极大的数，它把区间$[a,b]$等分为n份．将a,b之间的分割点记为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

任意两个相邻分割点间的距离是$\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}$．因此 $x_{i+1} = x_i + \mathrm{d}x$．因为数$n$极大，$\mathrm{d}x$非常小．利用刚才讨论的估计，我们得到

$$f(x_i)\mathrm{d}x \approx F(x_i + \mathrm{d}x) - F(x_i) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

对 $i = 0,1,\ldots,n-1$ 成立．对 $i = 0, i = 1,\ldots, i = n-1$ 连续使用该估计，可知所有这些$f(x_i)\mathrm{d}x$的和近似等于

$$[F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_3) - F(x_2)] +\ldots+[F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + [F(b) - F(x_{n-1})]$$

注意，这些项$F(x_1) - F(x_1)$、 $F(x_2) - F(x_2)$ 直到 $F(x_{n-1}) - F(x_{n-1})$ 成对相减，只剩下 $F(b) - F(a)$．可得 $F(b) - F(a)$ 是和式

$$f(x_0)\mathrm{d}x+f(x_1)\mathrm{d}x+f(x_2)\mathrm{d}x+\ldots+f(x_{n-2})\mathrm{d}x+f(x_{n-1})\mathrm{d}x$$

的一个近似估计．对以上所有近似值取极限，可得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$等于 $F(b) - F(a)$，这个等式就是微积分基本定理．现总结如下：给定一个定义在区间$[a,b]$上的连续函数f，微积分基本定理告诉我们

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x= F(b)-F(a)$$

其中F是f的不定积分．微积分基本定理给出了计算$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的基本方法．找到函数f的任一个不定积分F，计算差式$F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$即可．不过要注意按顺序计算．求函数$f$的显式表示的不定积分$F$可能非常困难甚至是不可能完成的任务．

最后我们给出一条评论来结束积分学的讨论．对给定函数$y = f(x)$和区间$a \le x \le b$，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是一个数．这个数与函数变量的写法无关．例如$\int_1^4 x^2 \mathrm{d}x, \int_1^4 t^2 \mathrm{d}t$和$\int_1^4 u^2 \mathrm{d}u$均等于同一个值，即$\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 = \left.\frac{t^3}{3}\right|_1^4 = \left.\frac{u^3}{3}\right|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21$．如果上限（或下限）允许变化，则定积分变为一个函数．例如$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是一个x的函数（为了不过度使用x，我们选择t作为函数f的变量）．微积分基本定理告诉我们，如果F是f的不定积分，则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$，从而有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F'(x) = f(x)$，因此函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$也是$f$的不定积分．

旋转体体积和曲线长度　我们先从圆柱体的体积等于底面积乘以高开始．可知高为h、底圆半径为r的圆柱体（见图7-7）体积等于$\pi r^2 h$．

设f是一连续函数，在$[a,b]$上对所有x满足 $f(x) \ge 0$．同前面一样，取一个极大的正整数n，把区间$[a,b]$ n等分，每个子区间的长度$\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}$．分割点和$f$的图形确定了一些极细的矩形，典型的一个矩形如图7-8所示．它的左边在x处，长为$\mathrm{d}x$，高为$f(x)$．现把由图形、x轴、直线 $x = a$ 和 $x = b$ 围成的区域绕x旋转一周．可以看到旋转产生的梨形立体的体积V近似等于从a到$b-\mathrm{d}x$间的分割点所确定的所有矩形旋转产生的小圆柱体的体积之和．典型的圆柱体（由图中的矩形产生）底面积为$\pi(f(x))^2$、高为$\mathrm{d}x$，故其体积为$\pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x$．根据我们对$\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$的初步定义，可以估计$V$．取极限即得

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \,\mathrm{d}x .$$

参考上文中积分与面积之间的联系，可以注意到这个定积分还等于函数$\pi\left(f(x)\right)^2$的图形从a到b的面积．

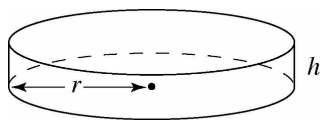


图　**7-7**

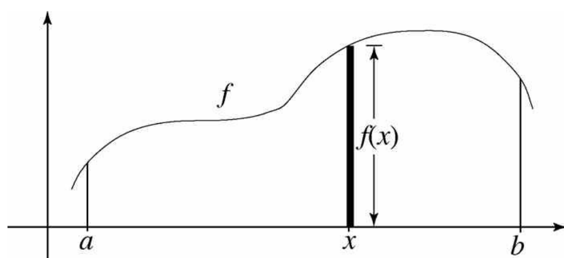


图　**7-8**

也能用定积分来计算曲线长度，方法如下．设f是一连续函数，点 $P = (a,c)$ 和 $Q = (b,d)$ 为它的图形中的两点．如图7-9所示．下面是计算曲线在点P和Q之间的曲线长度L的方法．同样取一极大的正整数n，把区间$[a,b]$进行n等分，每个子区间的长度$\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}$．$x$是一个典型分割点．$x+\mathrm{d}x$是紧邻它的下一个分割点．设$(x,y)$是图形上的一点，用长为$\mathrm{d}x$的线段和过$(x,y)$的切线建立一个直角三角形．用$\mathrm{d}y$表示它的高．图7-10展示了“显微镜下”的该三角形．注意到过(x,y)的切线的斜率为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．因此$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．根据毕达哥拉斯定理，直角三角形的斜边长度为$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$．对它进行因式提取，可得$(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2 = \left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right](\mathrm{d}x)^2$，所以

$$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right](\mathrm{d}x)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

既然$\mathrm{d}x$极其小，为了方便计算，小三角形里的$f(x)$图形的弧长等于直角三角形的斜边长度．点P和Q之间的曲线长度L等于从点P到点Q之间的所有这些小弧长的和．它约等于分割点从a变到 $b - \mathrm{d}x$ 时，所有

$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$ 项的长和．取极限，我们得到

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x.$$

有了这个公式，我们就完成了对微积分基础的简介．

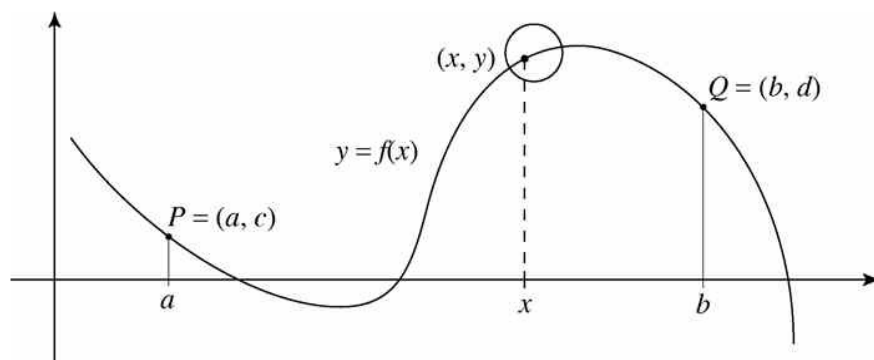


图　**7-9**

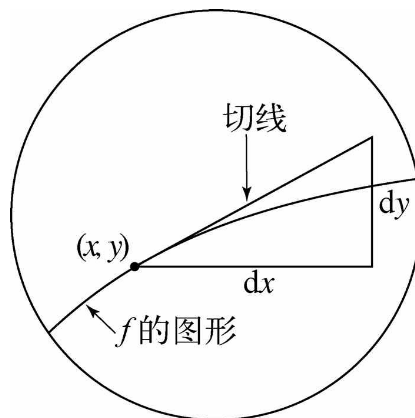


图　**7-10**

7.2　球形穹顶的体积

这是本书一再出现的主题，即大型穹顶产生的向外的力相当大，给结构稳定性带来问题．上一节介绍的微积分为我们估计圣索菲亚大教堂穹顶（第3章所讨论的）和罗马万神殿（第2章所叙述的）的重量提供了数学工具．

计算圣索菲亚大教堂穹顶的重量　图7-11将图3-3进行了修改．它展示了穹顶基 座四周环廊窗户上方的圣索菲亚大教堂穹顶的横截面，记录了它的壳的基本信息．我们假设壳的内外表面是球的一部分，将注意力放在壳的体积上．（如今这些内外表面不再是球形了．几个世纪以来，对它的各种重建工作导致了这种变形，见图3-6．）我们所讨论的球的球心相同，半径分别为 $R = 52.5$ 英尺， $r = 50$ 英尺．因此壳的厚度为2.5英尺．建造穹顶所使用的砌筑材料和灰泥的平均重量为110磅每立方英尺．图中从内外圆的公共球心出发的斜线与水平线的夹角约为 20°，其中内外圆确定了窗户上方穹顶的边界．我们将要采用的方法是估计壳的体积，其单位是立方英尺，然后将它乘以110，得到穹顶重量，其单位是磅．

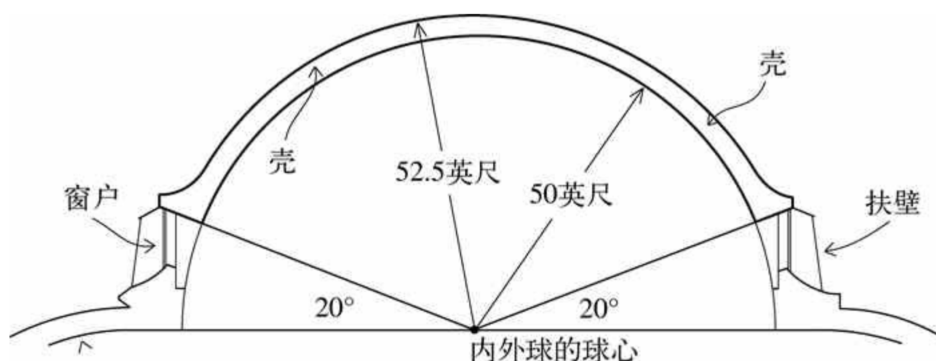


图　**7-11**

图7-12将左侧穹顶的横截面放到*xy*平面内．为了把壳的体积计算置于前面“旋转体体积和曲线长度”所讨论的方法框架中，已将该横截面旋转了90°．因为 $\cos 70^\circ = \frac{a}{r}$，可得 $a = r\cos 70^\circ \approx 0.34r = 17$．因此我们取 $a = 17$ 英尺．可按如下方法估计壳的体积．首先计算上半圆下方和区间$[a,R]$上方之间的区域绕*x*轴旋转所得到的体积V_1．接着计算下半圆下方和区间

$[a,r]$上方之间的区域绕x轴旋转得到的体积V_2．二者的差 $V = V_1 - V_2$ 是穹顶窗户上方的壳的近似体积．

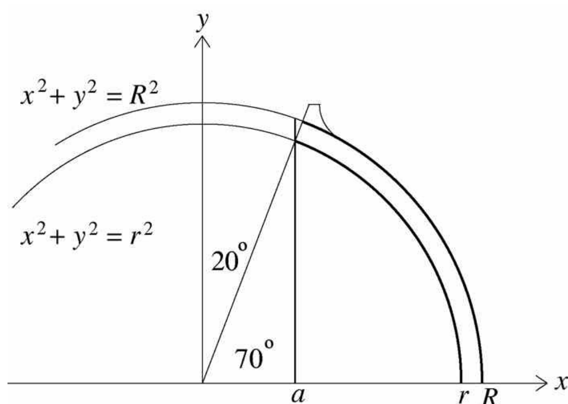


图 **7-12**

外圆上半部是函数 $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ 的图形，内圆的上半部是函数 $g(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ 的图形．把我们从对旋转体体积的讨论中学到的知识与微积分基本定理相结合，可得

$$V_1=\int_a^R \pi(\sqrt{R^2-x^2})^2\,\mathrm{d}x=\int_a^R \pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\pi\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\Bigg|_a^R\right]$$
$$=\pi\left[\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)-\left(R^2a-\frac{1}{3}a^3\right)\right]=\pi\left[\frac{2}{3}R^3-R^2a+\frac{1}{3}a^3\right]$$

用同样的方法，可得

$$V_2=\int_a^r \pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\int_a^r \pi(r^2-x^2)\mathrm{d}x=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\Bigg|_a^r\right]$$
$$=\pi\left[\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)-\left(r^2a-\frac{1}{3}a^3\right)\right]=\pi\left[\frac{2}{3}r^3-r^2a+\frac{1}{3}a^3\right]$$

因此

$$V=V_1-V_2=\pi\left[\frac{2}{3}R^3-R^2a+\frac{1}{3}a^3\right]-\pi\left[\frac{2}{3}r^3-r^2a+\frac{1}{3}a^3\right]=\pi\left[\frac{2}{3}(R^3-r^3)-a(R^2-r^2)\right]$$

代入 $R = 52.5$ 英尺、 $r = 50$ 英尺及 $a = 17$ 英尺，可得

$$V = \pi\left[\frac{2}{3}(52.5^3 - 50^3) - 17(52.5^2 - 50^2)\right] \approx \pi(13\ 135.42 - 4\ 356.25) \approx 27\ 581$$ 立方英尺

由于实际给出的尺寸精度只有两个有效数字，因此需要四舍五入所得到的体积，以达到同样精度水平．所以穹顶壳的体积约为 $V \approx 28\ 000$ 立方英尺．假设穹顶施工中所用的砌筑材料和灰泥的混合物重为110磅每立方英尺，可得窗户上面的穹顶重量约为

$$27\ 581 \times 110 \approx 3\ 000\ 000 \text{ 磅}$$

假设这一重量平均分布在40根支撑拱肋上，可得每根拱肋的重量约为75 000磅．我们在3.1节中看到，这会在穹顶基部附近的40根扶壁的每一根上产生约27 000磅的水平侧推力．

圣索菲亚大教堂穹顶的壳由两个同心球确定，估计它的体积相对简单．事实上，它的密度基本相同，容易从它的体积估计值中推出壳的重量的估计值．罗马万神殿的穹顶在这两种计算方面都更复杂．这是因为构成其壳内外表面边界的球不是同心球，且壳的混凝土密度也不同．

计算万神殿穹顶的重量　我们先从图2-45给出的万神殿壳的横截面开始．在 图7-13中，增加了构成横截面的外和内边界的圆及其圆心．在图中用水平虚线表示我们称为壳冠的下边界．壳冠将是我们讨论的焦点．

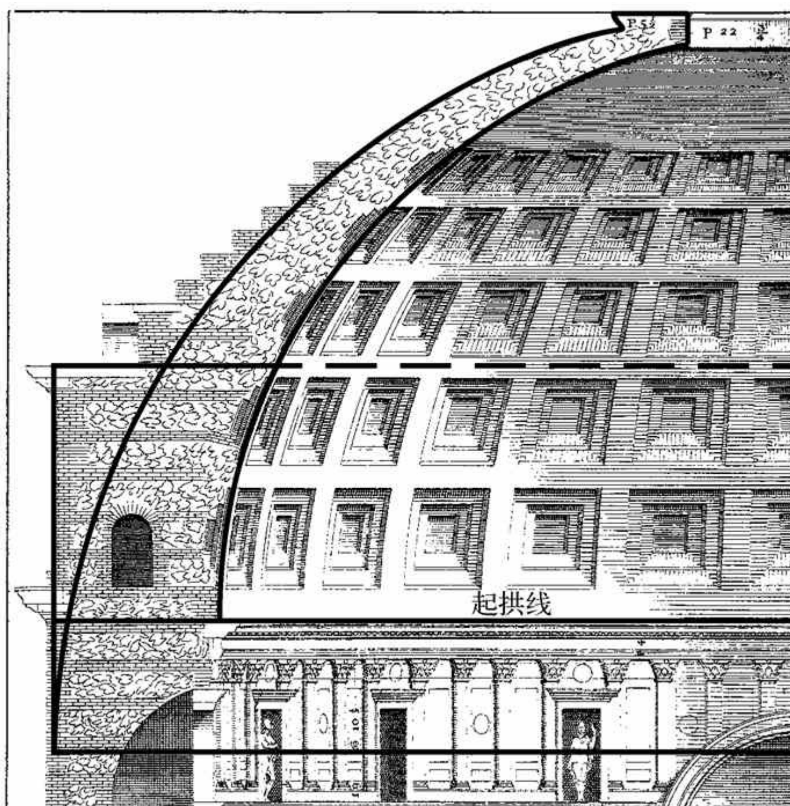


图**7-13**　选自帕拉迪奥的《建筑四书》，普林斯顿大学，马昆德艺术建筑藏书室

图7-14为图7-13的抽象．它将穹顶横截面的一半放置到*xy*坐标平面内．*x*轴由穹顶横截面外边界所在的圆的水平直径所确定．*y*轴位于穹顶的垂直中心轴上．常数*R*、*r*、*D*、*E*、*a*、*b*和*c*的意思如下．

R——确定壳横截面外边界的圆的半径．该圆的圆心为原点*O*．

r——确定壳横截面内边界的圆的半径．

D——内圆圆心的*y*坐标（它的*x*坐标为0）．

E——冠的下边界（用虚线表示）的*y*坐标．

a——圆孔（穹顶内的圆孔）边界的*x*坐标．

b——冠的下边界与内圆的交点的*x*坐标．

c——冠的下边界与外圆的交点的*x*坐标．

外圆的方程是 $x^2 + y^2 = R^2$，求解y得 $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ ．因为只考虑圆的上半部分，只取方程 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ．内圆的方程是 $x^2 + (y - D)^2 = r^2$，所以 $y - D = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ．我们将只考虑内圆位于直线$y = E$之上的部分，因此 $y \geq D$， $y - D = \sqrt{r^2 - x^2}$ ，所以相应的方程是 $y = \sqrt{r^2 - x^2} + D$ ．回顾第2章，万神殿壳的内表面半径为71英尺，它的圆孔直径为24英尺．可以用这些数据和图2-45得到估计值

$r = 71$、 $R = 92$、 $D = 16$、 $E = 48$、 $a = 12$、 $b = 64$ 和 $c = 78$

单位都是英尺．接下来对万神殿壳冠体积和重量的计算将忽略台阶和镶板．我们将假设以上所列数据具有两位有效数字，是可靠的．计算完成后，也要相应地对答案进行四舍五入．

我们现在将按照上一节中定义定积分的方法继续讨论．设n是一个极大的正数，将区间$[a,b]$（a和b上面已给出）等分成n份，每份长 $\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}$ ．设x为典型的分割点，令$\mathrm{d}x$为它到下一个分割点的距离．如图7-15所示，取一条从外圆延长到内圆的垂直线段．设它的左边界在x处，线段宽$\mathrm{d}x$．使这条线段按图中所示绕y轴旋转，可以看到这条线段围出了一条圆形环带，它的厚度为$\mathrm{d}x$．圆的半径为x，则环带的长度等于该圆的周长 $2\pi x$．该环带的高度为两个圆的y坐标之差 $\sqrt{R^2 - x^2} - \left(\sqrt{r^2 - x^2} + D\right)$ ．因此该环带的体积为

$$2\pi x\left(\sqrt{R^2 - x^2} - (\sqrt{r^2 - x^2} + D)\right)\mathrm{d}x$$

（因为 $2\pi x$ 为该带的内周长，这个体积表达式只是估计值．但随着$\mathrm{d}x$变小，该估计值的精度增加，取极限，则它趋于相等．）当x从a变到 $b - \mathrm{d}x$时，取所有的这些环带，注意它们一起构成落在垂直线$x=b$内（更准确地说，是落在垂直线$x=b$所产生的圆柱内部）的那部分壳冠的体积 V_1（更准确地说，是抽象形式的壳冠体积）．取极限，可得

$$V_1 = \int_a^b 2\pi x\left(\sqrt{R^2 - x^2} - (\sqrt{r^2 - x^2} + D)\right)\mathrm{d}x$$

为了求得壳冠余下部分的体积（同样是它的抽象形式），对区间$[b,c]$重复刚才对区间$[a,b]$所做的工作．取任意一个满足 $b \le x \le c - \mathrm{d}x$的$x$，考虑$x$处从外圆延长到该冠下边界（虚线表示）的垂直线段．同样，设$\mathrm{d}x$为该线段的宽．像以前那样旋转该线段，得到一条圆形带，体积为

$$2\pi x(\sqrt{R^2 - x^2} - E)\mathrm{d}x$$

将这些圆形带的体积累加起来，取极限，得到壳冠余下部分的体积V_2，为

$$V_2 = \int_b^c 2\pi x(\sqrt{R^2 - x^2} - E)\mathrm{d}x$$

抽象形式的壳冠的体积V等于两个定积分的和，即 $V = V_1 + V_2$．为计算V_1，验证$-\frac{2}{3}\pi(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\pi(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \pi D x^2$是$2\pi x(\sqrt{R^2 - x^2} - (\sqrt{r^2 - x^2} + D))$的不定积分，接着用微积分基本定理，可得

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi\left((R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} - (R^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{2}{3}\pi\left((r^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} - (r^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}\right) - \pi D(b^2 - a^2)$$

代入 $R = 92$， $a = 12$， $b = 64$， $r = 71$， $D = 16$，可得

$$V_1 \approx 984\,818 - 656\,875 - 198\,649 = 129\,294 \text{ 立方英尺}$$

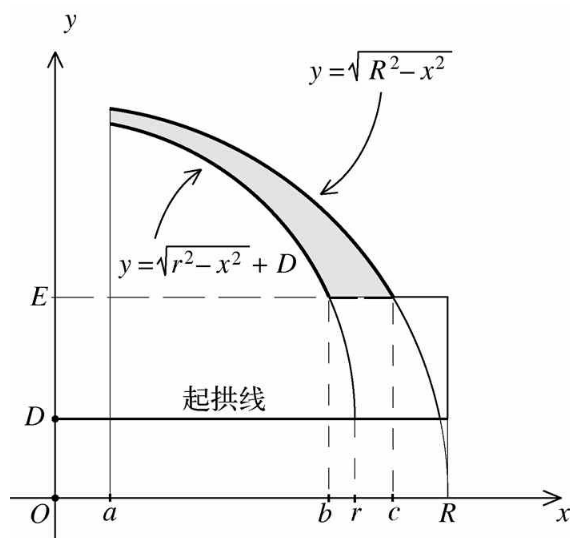


图 **7-14**

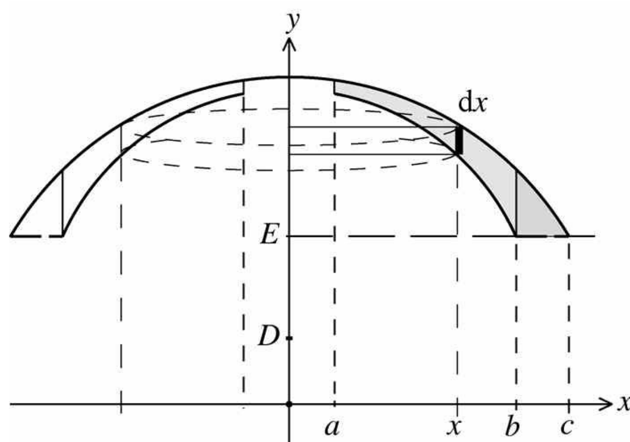


图 **7-15**

用同样的计算，

$$V_2=\int_b^c 2\pi x\left(\sqrt{R^2-x^2}-E\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi\left((R^2-b^2)^{\frac{3}{2}}-(R^2-c^2)^{\frac{3}{2}}\right)-\pi E(c^2-b^2)$$

代入之前的值以及 $E = 48$ 和 $c = 78$，可得

$$V_2 \approx 361\ 442 - 299\ 783 = 61\ 659 \text{ 立方英尺}$$

因此万神殿的壳冠体积的估计值为

$$V \approx 129\ 294 + 61\ 659 = 190\ 953 \text{ 立方英尺}$$

壳冠的重量是多少？参考图7-13中的穹顶横截面图．壳的混凝土密度从顶部向下到第三个环形台阶（含该台阶）约为81磅每立方英尺，从第三个环形台阶向下到第五个台阶（含该台阶）约为94磅每立方英尺，从第五个台阶向下到内穹顶的起拱线约为100磅每立方英尺．将该冠的体积的估计值取为190 000立方英尺，可知壳冠的重量W满足以下估计（单位为磅）

$$15\ 000\ 000 \le 191\ 000\times 81 \le W \le 190\ 000\times 100 \le 19\ 100\ 000$$

回忆一下，圣索菲亚大教堂穹顶的壳的体积和重量分别约为27 500立方

英尺和 3 000 000磅．万神殿壳冠的重量和体积比它大这么多是合理的吗？答案是肯定的，因为比较它们的形状和尺寸可知，万神殿穹顶的壳要大得多．（问题13考虑了该问题．）

看完微积分在穹顶研究中的作用，我们的注意力将集中到拱上．你可能已回忆起（6.2节）罗伯特·胡克的深刻见解，即“像悬挂柔软的线那样，不过要把它倒过来，就会架起一个拱”．经验告诉我们，悬挂的柔软绳子、弦和链子的形状一般是抛物线．但它在数学上是精确的抛物线吗？还是只不过是表面上像？接下来的讨论会考虑通过悬链倒置后得到的拱形，证明它不是一条抛物线，而是由一些指数项组合而成的函数的图形．

7.3　理想拱的形状

本节研究满足以下条件的稳定拱：（i）拱的唯一负载是该拱的重量；（ii）拱的唯一外部支撑是它的基座；（iii）拱上的重力完全与这些力所产生的挤压力的反作用力相平衡．（第三个条件与被拉伸的柔软悬链只对作用在它上面的重力有反作用力相似）核心问题是：这样一个理想化拱的精确形状是什么？

答案要从拱的中心曲线的概念开始．这条曲线由以下性质确定：如果点P是拱的横截面的质心，则该点在中心曲线上，且该横截面垂直于这条曲线过P点的切线．图7-16描述了上述情况．中心曲线被认为是拱内部的侧推力线．我们将假定拱由同一材料制成，继续探究拱中心曲线的形状．

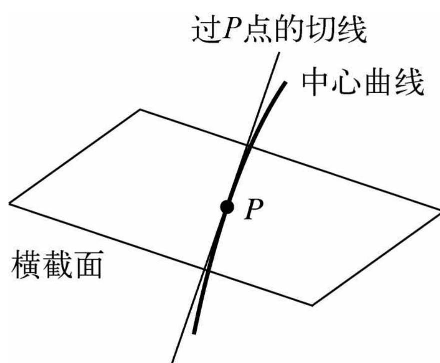


图　**7-16**

以下研究将使用2.4节中与向量相关的基础知识．图7-17展示了拱的边界和中心曲线．设中心曲线是函数 $y = f(x)$ 的的图形，确定这个函数的精确形式．设 $(x,f(x))$ 是中心曲线上的任一点，其中 $-b \le x \le b$．设 $C(x)$ 为该点处拱内的挤压力的值（见图7-17(a)，$\theta(x)$ 为中心曲线在该点的切线与水平线之间的夹角（见图7-17(b)）．最后，令w为单位长度拱的重量．假设它的值为常数．

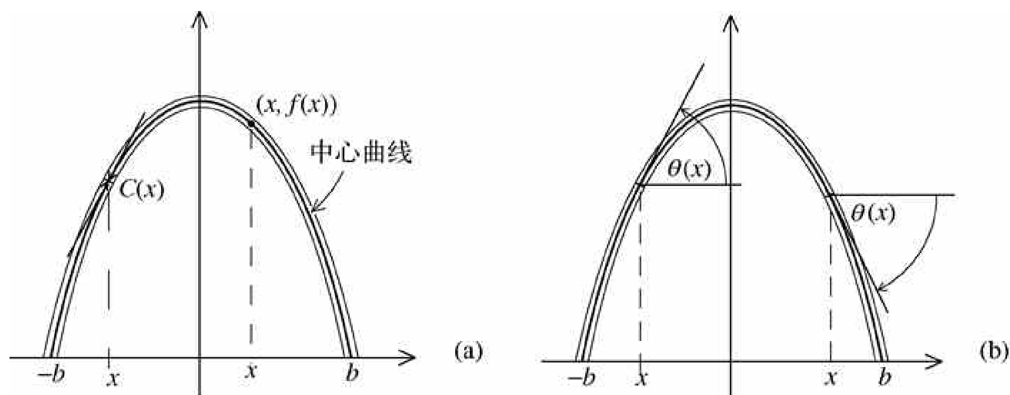


图 **7-17**

设 Δx 是一小的正数，考虑如图7-18(a)所示的在$[x,x+\Delta x]$上的拱段．这个拱段的上下边界由与中心曲线在x和$x+\Delta x$处的切线相垂直的直线所确定．该拱段的重量约等于$w\Delta s$，这里Δs是落在该拱段内的中心曲线的长度．重点注意放大后的这段拱，如图7-18(b)所示．和我们的基本假设相一致，该拱段上的重力由从下向上推它的挤压力$C(x)$与从上向下推的挤压力$C(x\ \Delta x)$的差抵消．通过平衡该段上的垂直力，我们得到 $C(x)\sin\theta(x) \approx C(x+\Delta x)\sin\theta(x+\Delta x)+w\Delta s$．由此得到

$$C(x+\Delta x)\sin\theta(x+\Delta x)-C(x)\sin\theta(x)\approx -w\Delta s$$

Δx越小，3个力越接近作用在同一点，近似程度越好．现在设 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，对图7-18(b)应用毕达哥拉斯定理，我们得到 $(\Delta s)^2\approx(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$，所以

$$\Delta s\approx\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{\left(1+\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right)(\Delta x)^2}=\sqrt{\left(1+\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right)}\Delta x$$

因此

$$\frac{C(x+\Delta x)\sin\theta(x+\Delta x)-C(x)\sin\theta(x)}{\Delta x}\approx -w\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

现令Δx趋于0，可以发现以下3个事情同时发生．等式左边变为函数$C(x)\sin\theta(x)$的导数，平方根变为$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$，中间的约等号变为等号．

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C(x)\sin\theta(x)=-w\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=-w\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$$

两边取不定积分（参考前文对积分学的介绍），我们得到

$$C(x)\sin\theta(x)=-w\int_{-b}^{x}\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\mathrm{d}t+ \quad +\text{常数}$$

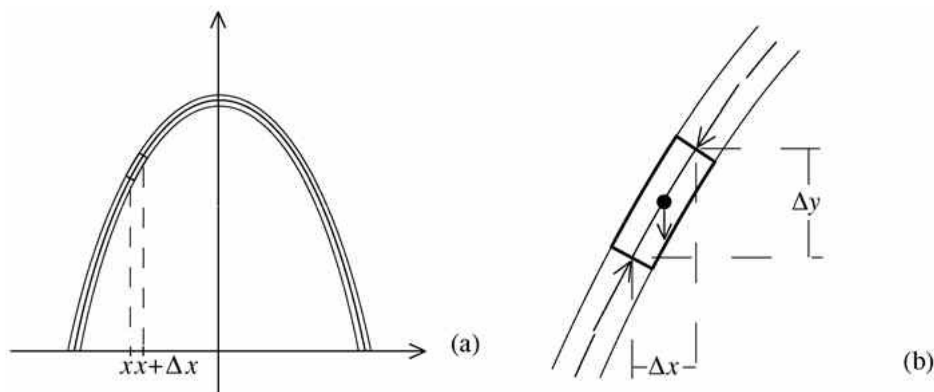


图 **7-18**

接着我们求力的水平分量．设m是单位长度拱的质量．重量等于质量乘以重力加速度，即 $w = mg$．因为拱段的重量近似等于$w\Delta s$，该拱段的质量近似等于$m\Delta s$．挤压力的两个水平分量相减得到一个力，它会使该拱段产生水平加速度a．因此根据牛顿力学定律，

$$C(x+\Delta x)\cos\theta(x+\Delta x)-C(x)\cos\theta(x)\approx(m\Delta s)a\approx am\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$

（这只是一个近似，因为两个水平力并不完全作用在同一点，且$m\Delta s$是拱段的近似质量．）从而得到

$$\frac{C(x+\Delta x)\cos\theta(x+\Delta x)-C(x)\cos\theta(x)}{\Delta x}\approx am\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

再让Δx趋于0．因为拱稳定，拱段并不会移动．所以加速度是0，我们得

到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C(x)\cos\theta(x)=0$$

因此 $C(x)\cos\theta(x)$ 是常数 $x = 0$．设，我们得到

$$C(x)\cos\theta(x) = C_0$$

这里 $C_0 = C(0)\cos 0 = C(0)$ 是在拱最顶端的挤压力．结合两个已经得到的主要结论，可得

$$\frac{C(x)\sin\theta(x)}{C(x)\cos\theta(x)}=-\frac{w}{C_0}\int_{-b}^{x}\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t+\text{常数}$$

从而有 $\tan\theta(x)=-\frac{w}{C_0}\int_{-b}^{x}\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t+\text{常数}$．因为 $\tan\theta(x)$ 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$ 都等于中心曲线在点$(x,f(x))$处的切线的斜率，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{w}{C_0}\int_{-b}^{x}\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t+\text{常数}$$

+ 常数

两边求导之后，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{w}{C_0}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

（一般用$f''(x)$或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 表示$f'(x)$的导数．）这个所谓的微分方程能明确确定函数 $y = f(x)$．

考虑指数函数 $g(x) = \mathrm{e}^x$，分别用下式定义双曲正弦函数和双曲余弦函数：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad 和 \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

（这些函数名字中有“双曲”一词是因为它们和双曲线有关，其关联方式与三角函数与圆非常相似．）图7-19绘出了它们的图形．对大的正数x，数量$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$非常小，故sinh$x$和cosh$x$都近似等于$\frac{1}{2}e^x$．对大的负数x，值$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$占优．容易证明 $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$，又因为 $g'(x) = e^x$，故$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$和$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$．

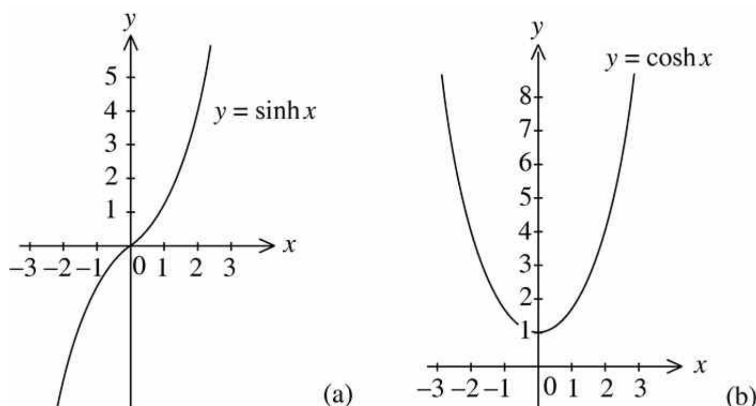


图　**7-19**

现在考虑函数

$$y = -\frac{C_0}{w}\cosh\left(\frac{w}{C_0}x\right) + D$$

其中w和C_0前面已给出，D是一个常数（未明确给出）．根据链式法则，$\frac{dy}{dx} = -\sinh\left(\frac{w}{C_0}x\right)$，所以$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\sinh\left(\frac{w}{C_0}x\right)\right)^2$，因此$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\left(\sinh\left(\frac{w}{C_0}x\right)\right)^2 = \left(\cosh\left(\frac{w}{C_0}x\right)\right)^2$，可得$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \cosh\left(\frac{w}{C_0}x\right)$．对

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sinh\left(\frac{w}{C_0}x\right)$应用链式法则，得到$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{w}{C_0}\cosh\left(\frac{w}{C_0}x\right)$．据此可知函数$y=-\frac{C_0}{w}\cosh\left(\frac{w}{C_0}x\right)+D$和中心曲线的函数 $y = f(x)$ 满足同样的微分方程．因为这个微分方程基本上只有一个解（这是根据微分方程的理论所确定的），从而有$y=f(x)=-\frac{C_0}{w}\cosh\left(\frac{w}{C_0}x\right)+D$，其中$D$为某具体常数．设$h$是中心曲线达到的最大高度，则有$h=f(0)=-\frac{C_0}{w}\cosh(0)+D=-\frac{C_0}{w}+D$，所以$D=h+\frac{C_0}{w}$．因此拱的中心曲线是函数

$$y=f(x)=-\frac{C_0}{w}\cosh\left(\frac{w}{C_0}x\right)+\left(h+\frac{C_0}{w}\right)$$

的图形．该图形给出了由同一材料建造的拱的精确形状，此时拱上的重力与这些力产生的挤压力的反作用力相平衡．该形状即是悬链线的一个代表（拉丁语中，catena意为“链”）．

给人印象最深的例子是圣路易斯大拱门，它的几何形状与悬链线密切相关，如图7-20所示．大拱门是由埃罗·沙里宁（1910—1961）设计的通往美国西部的象征．在设计师去世后，它由Saarinen & Associates公司在1963年2月到1965年10月建造完成．



图**7-20**　圣路易斯大拱门，**Bev Sykes**摄

大拱门有630英尺高，底部有630英尺宽．拱门的中心曲线方程由Saarinen公司的建筑工程师给出，它在蓝图上被表示为

$$y=-A\cosh\left(\frac{B}{b}x\right)+(h+A)$$

这里 h=625.092 5 英尺，是中心曲线的最大高度， b = 299.223 9，是中心曲线在底部的两个端点距离的一半． $A=\dfrac{h}{Q_b/Q_t-1}=68.767\ 2$，$B=\cosh^{-1}\dfrac{Q_b}{Q_t}=3.002\ 2$（意味着 $\cosh B=\dfrac{Q_b}{Q_t}$），其中 Q_b = 1 262.665 1 和Q_t = 125.140 6 分别是拱门底部和顶端的横截面面积（单位都是平方英尺）．

最好这样理解该拱门的横截面：考虑中心曲线上的一点P和P过点垂直于中心曲线的平面，该平面内拱门的横截面是一个以P为形心且有一个顶点位于中心曲线的竖直平面上的等边三角形．三角形的边长从拱门底

部的54英尺到顶部的17英尺不等.

为了了解大拱门的几何形状与悬链线的关系，我们先研究以下方程给出的曲线

$$y=-\frac{b}{B}\cosh\left(\frac{B}{b}x\right)+\left(y_0+\frac{b}{B}\right)$$

其中b和B上文已给出，$y^0=y(0)$是曲线的高．为了证明该曲线是上文讨论过的悬链线的一种，只要变化一下，使$\frac{b}{B}=\frac{C_0}{w}$．现将该悬链的$y$坐标乘以常数$\frac{AB}{b}=\frac{68.767\ 2\times 3.002\ 2}{299.223\ 9}\approx 0.69$．这一乘法运算把该悬链线沿垂直方向压缩了0.69倍（如图7-21(a)所示），得到函数

$$f(x)=-\frac{AB}{b}\frac{b}{B}\cosh\left(\frac{B}{b}x\right)+\frac{AB}{b}\left(y_0+\frac{b}{B}\right)=-A\cosh\left(\frac{B}{b}x\right)+(h+A)$$

这样，大拱门的中心曲线是悬链线的一种压缩形式．这种压缩方式就像人们把椭圆挤成圆一样，如图7-21b所示．在设计大拱门时，为什么沙里宁要用这种方式压缩一条悬链线呢？可能是因为美学效果，经压缩后的拱门完美地符合平方630×630英尺的尺寸.

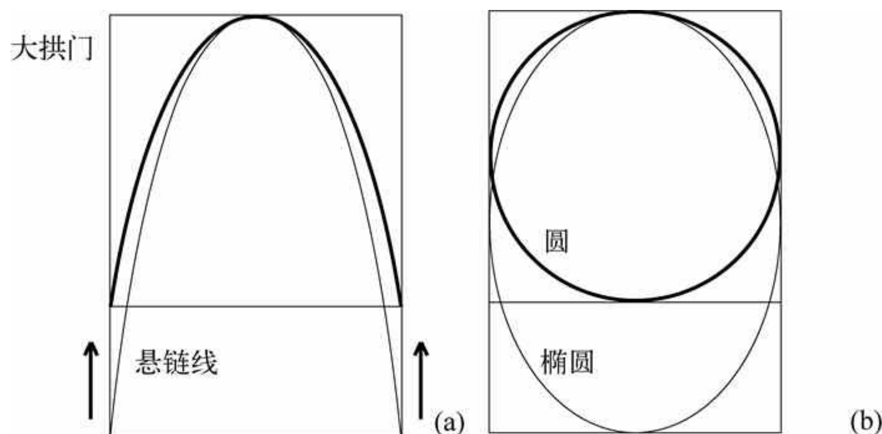


图　**7-21**

本章的最后一节应用微积分方法研究力矩、质心以及库仑所用的拱券稳定性方法．这些应用都是建立在6.3节内容的基础上.

7.4　力矩和质心的微积分

我们首先从阿基米德发现的重要理论入手，即当计算由结构构件的重量所产生的力绕结构中某点的力矩时，可以假定整个构件的重量集中在它的质心．我们将用一个简单的例子来说明这个原理，然后用它来确定一个半圆形拱段的质心．

考虑一根均匀细梁．如图7-22所示，它被放在xy平面上，它的一端固定在原点 $x = 0$ 上，另一端放在x坐标为b的点上．梁与水平线的夹角是θ，长度为L，每单位长度的重量是w．所以梁的总重量是wL．用点C表示梁的质心位置．因为梁是均匀的，所以C是其矩形横截面的形心．用相似三角形验证C的x坐标是$\frac{b}{2}$．假定梁的重量集中于C．这样从重力对梁的作用线到原点的距离是$\frac{b}{2}$，根据阿基米德的理论可知作用在梁上的力绕原点的力矩是$wL\times\frac{b}{2}$．它与把梁分为若干个很小的部分并把它们绕原点的力矩加起来所得到的结果相同吗？微积分告诉我们答案是肯定的．

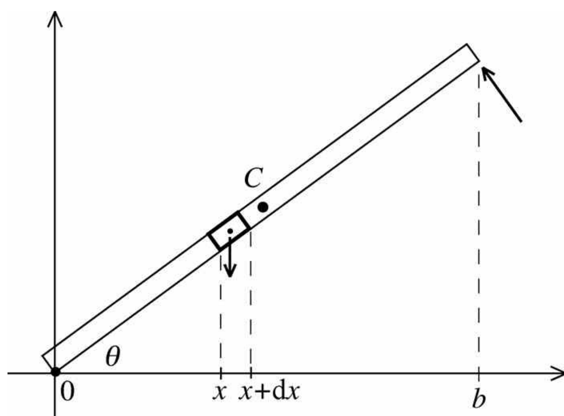


图　**7-22**

继续用本章前面对积分学的讨论，设n是一极大正整数，把区间[0,b]n等分，每个子区间的长度是$\mathrm{d}x=\frac{b}{n}$．对一个典型的分割点 x、 $x+\mathrm{d}x$是紧邻的下一个分割点．这两个分割点确定了图7-22所示的梁的小段．设l是该

段的长度，可以看到 $\cos\theta = \frac{\mathrm{d}x}{l}$，则 $l = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta}$，该小段的重量是 $wl = w\frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta}$．该段重力的作用线与原点 x=0 之间的距离几乎等于x，所以该段绕原点0的力矩几乎等于 $w\frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta}\times x = \frac{w}{\cos\theta}x\mathrm{d}x$．当$x$从0到 b - dx 时，把全部小力矩加起来并取极限，我们得到

$$\int_0^b \frac{w}{\cos\theta}x\mathrm{d}x$$

根据微积分基本定理，它等于 $\left[\frac{w}{\cos\theta}\frac{1}{2}x^2\right]_0^b = \frac{w}{\cos\theta}\times\frac{b^2}{2} = w\frac{b}{\cos\theta}\times\frac{b}{2}$．注意 $\cos\theta = \frac{b}{L}$，所以 $L = \frac{b}{\cos\theta}$，进而可得这些小力矩的和等于 $wL\times\frac{b}{2}$，与前文的计算结果一样．这就确定——至少在均匀的细梁中，计算力矩时，可以认为物体的重量集中于它的质心．可以证明一般而言这都是正确的．

我们现在回顾一下库仑对拱的分析．图7-23将图6-30内的拱段$ABba$放在xy平面上并添加了相关信息．在6.3节无需要求拱为圆形，但此处假设该条件成立．拱的内外边界由以原点为圆心、半径分别R为r和的圆确定．我们假设拱的厚度（垂直于xy平面的尺寸）是1单位，它由密度是w的均匀材料建成．点C是拱段的质心且c为点C到y轴的距离．图中展示了一条过边界ab的直线，它与x轴的夹角是 90° - α．因为拱的材料均匀，C位于过O点由 $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ 角所确定的直线上．事实上，这两条直线的斜率分别为 90° - α和 $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ 的正切，这就决定了它们的方程是 y = (tan(90°- α))x 和 $y = \left(\tan\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right)x$．

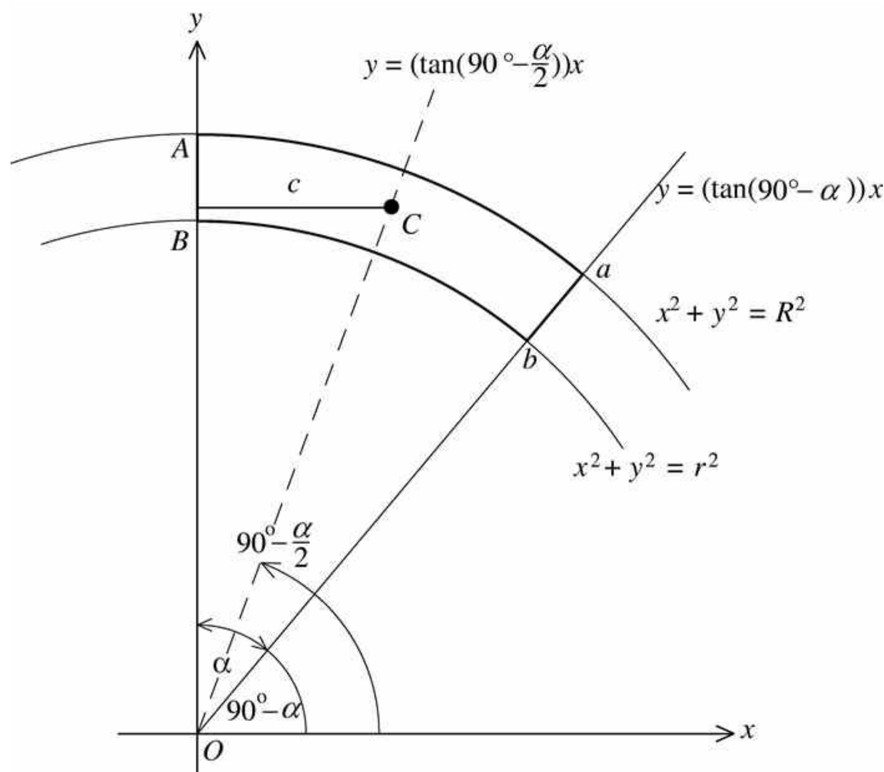


图 **7-23**

下一步研究的目的是确定质心C的位置．因为拱均匀（厚度是1单位），就能够在xy平面内确定C的位置．因为C位于直线$y=\left(\tan\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)\right)x$上，可以用$x$坐标$c$确定它的位置．我们将用两种方法计算拱段绕$y$轴的力矩$M_y$．我们先考虑把拱段分成小长条，通过把全部长条的小力矩加起来计算M_y．接着假设整个拱段的重量都集中在C处，再次计算M_y．让这两个结果相等，确定x坐标c，从而确定C的位置．把图7-23中xy平面看成水平的，认为重力垂直向下作用于该平面且将y轴作为旋转轴，这些都有助于理解这些讨论的细节．

图7-24绘出了一个贯穿拱段的竖直细长条．它处于典型位置，其左边界在x处，厚度为dx．该长条的重量等于它的面积乘以它的密度w．该长条绕y轴的力矩是它的重量和它到y轴的距离x的乘积．因为该长条的厚度为dx，它的长度由拱段的上下边界确定，所以当 $0\le x\le r\sin\alpha$ 时，该长条的力矩是$x\times w\left(\sqrt{R^2-x^2}-\sqrt{r^2-x^2}\right)\mathrm{d}x$，当 $r\sin\alpha\le x\le R\sin\alpha$ 时，为

$x\times w\left(\sqrt{R^2-x^2}-\tan(90^\circ-\alpha)x\right)\mathrm{d}x$．用定积分的知识，可得所有这些细长条的力矩和是

$$M_y=\int_0^{r\sin\alpha}x\times w\left(\sqrt{R^2-x^2}-\sqrt{r^2-x^2}\right)\mathrm{d}x+\int_{r\sin\alpha}^{R\sin\alpha}x\times w\left(\sqrt{R^2-x^2}-\tan(90^\circ-\alpha)x\right)\mathrm{d}x$$

使用链式法则证明 $-\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$ 是 $x\sqrt{R^2-x^2}=x(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 的不定积分，同样可以证明 $-\frac{1}{3}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$ 是 $x\sqrt{r^2-x^2}=x(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 的不定积分．所以根据微积分基本定理有

$$\begin{aligned}M_y=&\left[-\frac{1}{3}w(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}w(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^{r\sin\alpha}\\&+\left[-\frac{1}{3}w(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}w\tan(90^\circ-\alpha)x^3\right]\Bigg|_{r\sin\alpha}^{R\sin\alpha}\\=&-\frac{1}{3}w(R^2-r^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}w(r^2-r^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}wR^3-\frac{1}{3}wr^3\\&-\frac{1}{3}w(R^2-R^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}w\tan(90^\circ-\alpha)\times R^3\sin^3\alpha\\&+\frac{1}{3}w(R^2-r^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}w\tan(90^\circ-\alpha)\times r^3\sin^3\alpha\\=&\frac{1}{3}wr^3(1-\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}w(R^3-r^3)-\frac{1}{3}wR^3(1-\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}\\&-\frac{1}{3}w(R^3-r^3)\tan(90^\circ-\alpha)\sin^3\alpha\\=&\frac{1}{3}wr^3\cos^3\alpha+\frac{1}{3}w(R^3-r^3)-\frac{1}{3}wR^3\cos^3\alpha\\&-\frac{1}{3}w(R^3-r^3)\times\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ-\alpha)}\times\sin^3\alpha\end{aligned}$$

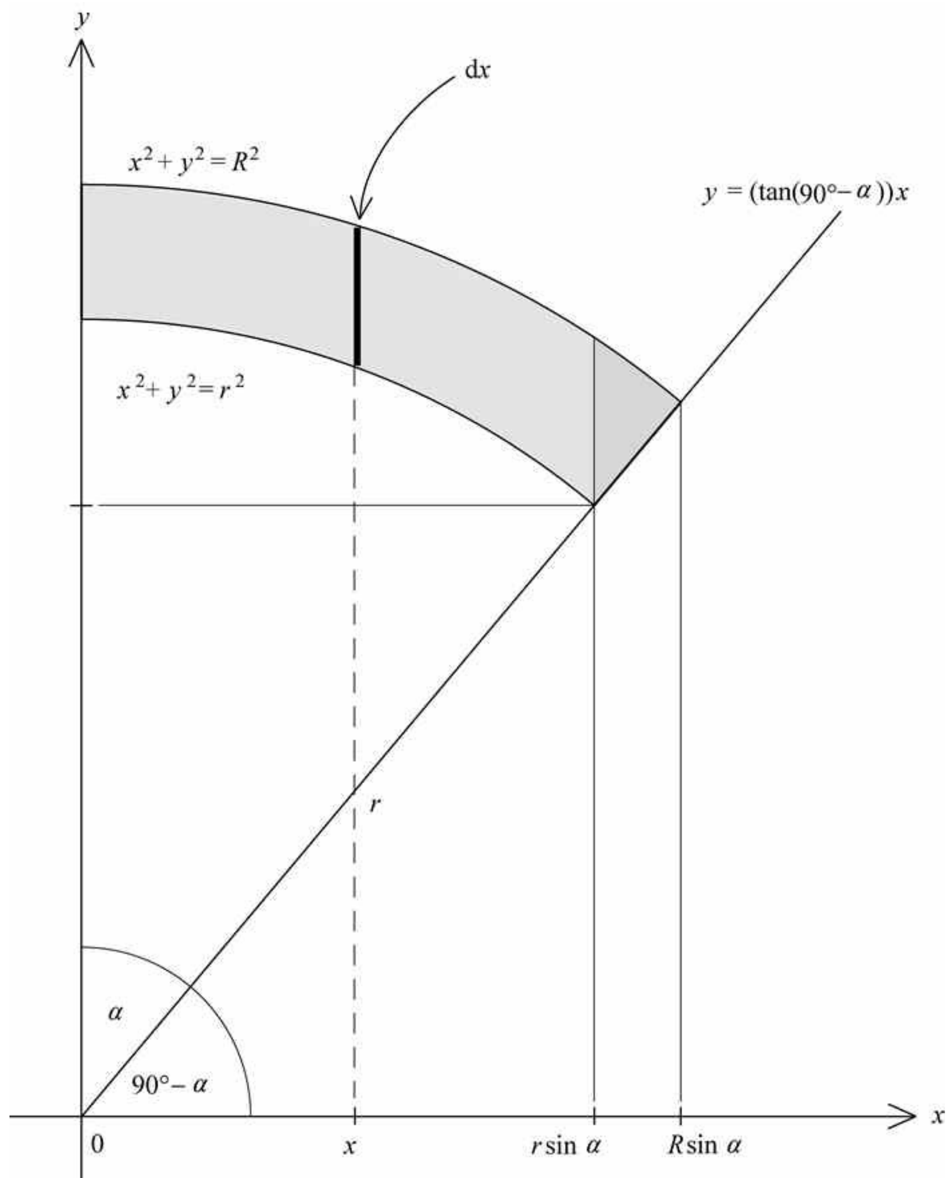


图　**7-24**

最后一步利用了2.3节中的恒等式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$．代入那一节的另两个公式，即 $\sin(90°- \alpha) = \cos\alpha$ 和 $\cos(90°- \alpha) = \sin\alpha$ 后，我们得到

$$M_y=\frac{1}{3}w(R^3-r^3)\left(1-\cos^3\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\sin^3\alpha\right)$$
$$=\frac{1}{3}w(R^3-r^3)\left(1-\cos^3\alpha-\cos\alpha\times\sin^2\alpha\right)$$
$$=\frac{1}{3}w(R^3-r^3)(1-\cos^3\alpha-\cos\alpha\times(1-\cos^2\alpha))=\frac{1}{3}w(R^3-r^3)(1-\cos\alpha)$$

$M_y=\frac{1}{3}w(R^3-r^3)(1-\cos\alpha)$就是把所有细长条的力矩加起来后得到的拱段力矩，这样用第一种方法计算M_y就完成了.

要第二次计算 M_y，首先注意图7-23中两个圆之间的区域的面积是 $\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)$．拱段$ABba$的面积是它的$\frac{\alpha}{360°}$．因为拱段的厚度是1单位，密度为$w$，可得该拱段的重量为$W_\alpha=w\pi(R^2-r^2)\times\frac{\alpha}{360°}$．因为全部重量集中$C$处，我们可得

$$M_y=c\times w\pi(R^2-r^2)\times\frac{\alpha}{360°}.$$

根据 M_y 的两个结果相等，我们最后得到

$$c=\frac{\frac{1}{3}(R^3-r^3)(1-\cos\alpha)}{\pi(R^2-r^2)(\frac{\alpha}{360°})}.$$

用弧度而不是度数度量角大大方便了三角函数的微积分计算．例如，若x的单位是弧度，则函数$\sin x$和$\cos x$的导数分别是$\cos x$和$-\sin x$．用度数就不会这么简单．从度数到弧度的转化由半径为1的圆给出．该圆的360°的圆心角环绕整个圆周 2π，所以360°角对应于长度 2π．因此1°对应于圆周上的弧长$\frac{2\pi}{360}=\frac{\pi}{180}$，任何度数为$\alpha$的角相当于长度$\alpha\times\frac{\pi}{180}$，这个长度就是角$\alpha$的弧度．都用度数为单位的两个角的比值$\frac{\alpha}{360}$等于都用弧度表示

的两个角的比值 $\frac{\alpha}{2\pi}$．因此用 $\frac{\alpha}{2\pi}$ 替换 $\frac{\alpha}{360°}$ 可以将前文的W_α和c表达式转换为

$$W_\alpha = \frac{1}{2}w(R^2 - r^2)\alpha \quad 和 \quad c = \frac{\frac{2}{3}(R^3 - r^3)(1-\cos\alpha)}{(R^2 - r^2)\alpha}$$

这里α的单位为弧度.

计算库仑拱　这部分内容用微积分方法探究库仑对拱的稳定性的分析．回顾一 下，根据图6-30和6-32的数据，库仑确信如果拱顶部的水平挤压力H满足 $G_0 \le H \le G_1$，则该拱不会受到铰合损坏，这里G_0为 $\frac{W_\alpha x_0}{y_0}$ 的最大值，G_1为 $\frac{W_\alpha x_1}{y_1}$ 的最小值，这两个极值中，α都在$0° \le \alpha \le 90°$间变化．假定与铰合损坏相比，不太能发生滑动损害，则不等式$G_0 \le H \le G_1$是库仑判断拱稳定性的基本判据.

接下来的研究会使用本节前文得出的结论，将 $\frac{W_\alpha x_0}{y_0}$ 明确表示为α的函数，接着考虑将微积分应用到它的最大值G_0求解问题中．（讨论7.3解决了类似的函数 $\frac{W_\alpha x_1}{y_1}$ 及其最小值G_1的问题．）图7-25(a)和图7-25(b)给出了相关信息．对G_0的讨论建立在图7-25(a)的基础上并结合了库仑在《论静力学问题》中对读者的指导，即必须假设H作用在A点，这样可以使y^0尽可能大，从而使G^0尽可能小．对G^1需要做类似的假设，如图7-25(b)所示．设H作用在B点，这样就使y^1尽可能小，从而使G^1尽可能大．（讨论7.3将考虑H的作用位置不同时的结果．）

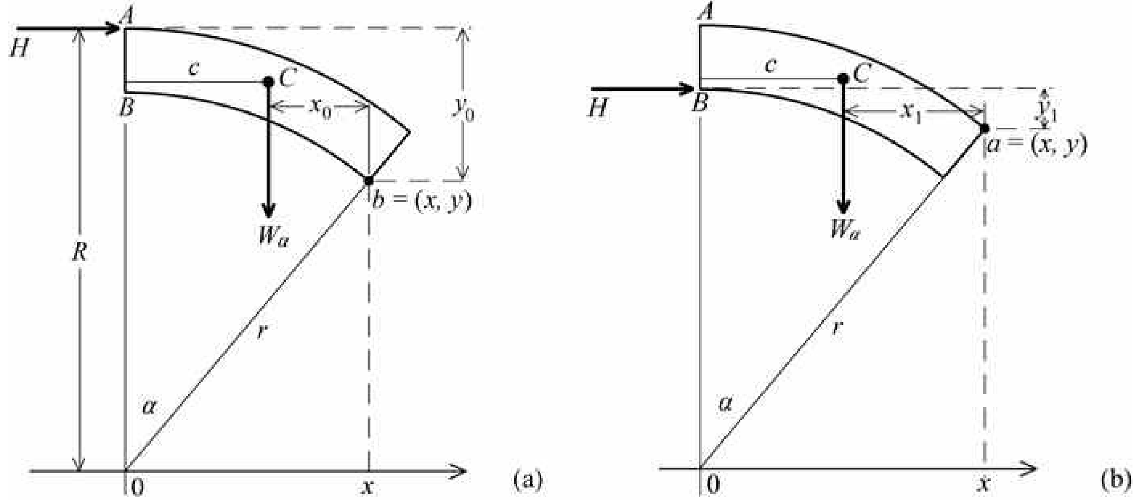


图 **7-25**

我们先把 $\frac{W_\alpha x_0}{y_0}$ 表示为α的函数，这里α的单位是弧度．图7-25(a)告诉我们，点 $b = (x,y)$ 的坐标为

$$x = r\sin\alpha \text{ 和 } y = r\cos\alpha$$

从图7-25(a)可知

$$x_0 = x - c = r\sin\alpha - \frac{\frac{2}{3}(R^3 - r^3)(1-\cos\alpha)}{(R^2 - r^2)\alpha} \text{ 和 } y_0 = R - y = R - r\cos\alpha$$

又可知

$$\begin{aligned} W_\alpha x_0 &= \frac{1}{2}w(R^2 - r^2)\alpha\left(r\sin\alpha - \frac{\frac{2}{3}(R^3 - r^3)(1-\cos\alpha)}{(R^2 - r^2)\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2}w(R^2 - r^2)r\alpha \times \sin\alpha - \frac{1}{3}w(R^3 - r^3)(1-\cos\alpha) \end{aligned}$$

因此有

$$\frac{W_\alpha x_0}{y_0}=\frac{\frac{1}{2}wr(R^2-r^2)\alpha\sin\alpha-\frac{1}{3}w(R^3-r^3)(1-\cos\alpha)}{R-r\cos\alpha}$$

如果需要，这时可以回顾一下正余弦函数及其导数的基本知识．因为正余弦函数可微，且分母 $R - r\cos\alpha>0$（因为 $R>r$），所以函数 $g_0(\alpha)=\frac{W_\alpha x_0}{y_0}$ 在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上可微．因而可以通过令$g_0(\alpha)$的导数等于0来求解α．在得到的值中进行筛选，从而求出$g_0(\alpha)$的最大值G_0．通过应用除法法则（以及在中间应用乘法法则），验证$g_0(\alpha)$的导数的分子为

$$\left[\frac{1}{2}wr(R^2-r^2)(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)-\frac{1}{3}w(R^3-r^3)\sin\alpha\right](R-r\cos\alpha)$$
$$-\left[\frac{1}{2}wr(R^2-r^2)\alpha\sin\alpha-\frac{1}{3}w(R^3-r^3)(1-\cos\alpha)\right]r\sin\alpha$$

分母为$[R - r\cos\alpha]^2$．进行代数运算后，可得

$$g_0'(\alpha)\frac{\frac{1}{2}wr(R^2-r^2)[R(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)-r(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha)]-\frac{1}{3}w(R^3-r^3)(R-r)\sin\alpha}{[R-r\cos\alpha]^2}$$

为了确定G_0，先将 $R^2 - r^2$ 因式分解为$(R + r)(R - r)$并去掉$w(R - r)$项，然后令

$$\frac{1}{2}r(R+r)[R(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)-r(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha)]-\frac{1}{3}(R^3-r^3)\sin\alpha=0$$

解出α，这里 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$．对给定的$r$和$R$值，有几种方法可以求解，既可以是“硬”的方法，即用诸如牛顿法这种逐次逼近技术，也可以是“软”方法，即使用诸如Maple、Mathematica和MATLAB这样的计算机程序．所有的求解方法都超出了本书的范围，这也验证了库仑的观点，即用反复试凑的方法总比用微积分这类“精确方法”更容易．讨论7.3根据库仑的建议（见6.3节末尾处的一段话），即先从 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ （即 $\alpha = 45°$）开始，计算

$\frac{W_\alpha x_0}{y_0}$，然后不断减小α的值（即向着拱顶石的方向移动），重复上述计算，很容易得到G_0的值.

我们最后将考虑一个问题．即使库仑对拱的稳定性的研究（见第6章）带来了一些反映材料强度的参数（如系数 τ、σ 和 μ），他接下来所做的假设还只是将这一研究简化成了严格的几何问题．例如，$\frac{W_\alpha x_0}{y_0}$ 的最大值G_0只与R和r有关，与建造拱的材料（除了w）无关．最后，库仑的分析与海曼的安全定理（见6.2节）一致，即砌筑拱券的稳定性主要取决于它的几何形状（假设建筑材料耐挤压）.

7.5　问题和讨论

以下所有的问题都与本章涉及的内容相关．

问题**1**　已知 $f(x) = x^2$，应用极限定义

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

证明 $f'(x) = 2x$．再应用它求 $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ 的导数．【提示：在每种情况下，重新整理代数表达式，使得在取极限之前就可以消掉 Δx．】

问题**2**　使用链式法则求函数 $f(x) = (4 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ 的导数．

问题**3**　函数 $f(x) = (x_2 - 1)_3$ 的定义域是什么？这个函数有3个临界点，它们把数轴分成4个区间．求出这些临界点并确定函数在每个区间上是递增还是递减．确定图形最高点（函数的最大值点）和图形最低点（函数的最小值点）的x坐标．对函数 $g(x) = (x^2 - 4)^{\frac{1}{3}}$ 和 $h(x) = (x^2 - 9)^{\frac{2}{3}}$ 重复上述过程．

问题**4**　已知函数$f(x)$和$f(x)$的一个不定积分$F(x)$．回想一下，对任意小数dx，乘积$f(x)$dx约等于 $F(x + \mathrm{d}x) - F(x)$．已知 $f(x) = 3x^2$，并注意到$F(x)=x^3$是它的一个不定积分．取 $x = 3$，$\mathrm{d}x = 0.01$，验证近似程度．再取$\mathrm{d}x = 0.001$，同样进行验证．是否后者的近似程度更好？

问题**5**　考虑函数$f(x) = 5 - x^2$，其中 $0 \le x \le 2$．

i．取 $n = 4$，计算定义积分 $\int_0^2 (5 - x^2)\mathrm{d}x$ 的过程中出现的和．其精度取小数点后两位．

ii．取 $n = 6$，重复计算定义积分 $\int_0^2 (5 - x^2)\mathrm{d}x$ 的过程中出现的和，其精度取小数点后两位．

iii．应用微积分基本定理求出该积分的精确值．为什么(i)和(ii)的结果非常接近精确值？

问题**6**　考虑方程为 $y = x^2 + 1$ 的抛物线．绘制它的图形，强调积分 $\int_{-3}^{3}(x^2+1)\mathrm{d}x$ 所表示的区域并通过积分计算求出该区域的面积．现用水平线 $y = 10$ 切割该抛物线．使用4.1节的阿基米德面积公式，计算切线所确定的抛物线截面的面积．通过从矩形中减去抛物线截面的面积来验证积分的值．

问题**7**　解释定积分 $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$ 是在一条曲线下的区域的面积，根据这个解释求积分值．

问题**8**　通过将积分看成圆弧下的区域的面积来证明 $\int_{2}^{5}\left(4+\sqrt{9-(x-5)^2}\right)\mathrm{d}x = 12+\frac{9}{4}\pi$ ．

问题**9**　研究本章前面的讨论“旋转体体积和曲线长度”．利用图7-26，用定积分表示下文给出的立体的体积．使用微积分基本定理计算它们的值．

i．一个高为h的截面圆锥体，其圆形边界的半径分别为r_0和r．

ii．一个半径r为的球．

iii．一个高为h且底圆半径为r的圆锥体．在这种情况下，用变量y建立积分．

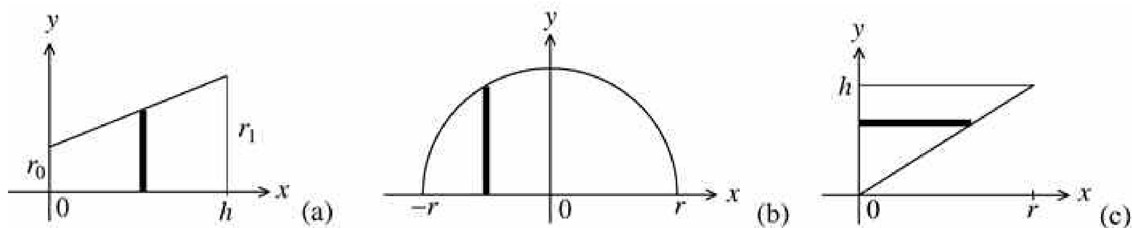


图　**7-26**

问题**10**　复习指数函数e^x的基本性质，研究7.3节中的双曲函数 $y = \sinh x$ 和 $y = \cosh x$ 的定义.

i．证明 $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$．考虑一个$uv$坐标平面，可以注意到点$(\cos x,\sin x)$位于圆 $u^2 + v^2 = 1$ 上，点$(\cos x,\sin x)$位于双曲线 $u^2 - v^2 = 1$ 上.

ii．根据 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x$ ，证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x$.

问题**11**　使用曲线的弧长公式，计算图7-27中两个图形的给定点之间的长度．在图7-27(a)中，用距离公式验证你的答案．图7-27(b)中的情况则要参考问题10.

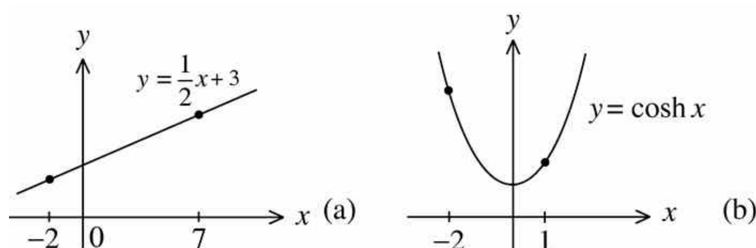


图　**7-27**

问题**12**　回顾3.7节．参考问题4和问题5中关于圣索菲亚大教堂原始穹顶的结论和推出它们所需要的猜测．使用这一知识和本章中的讨论“计算圣索菲亚大教堂穹顶的重量”，推出原始穹顶的重量约为23 300磅.

问题**13**　利用图7-14和数据 $r = 17$、 $R = 92$、 $a = 12$、 $b = 64$，估计万神殿穹顶的壳冠的最大和最小厚度．结果会证实它的壳比内半径为50英尺、厚为2.5英尺的圣索菲亚大教堂的球形壳要大得多.

问题**14**　研究万神殿穹顶壳冠体积的计算，特别注意图7-13、图7-14和图7-15．通过再给 $V_1 = \int_a^r 2\pi x\left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(\sqrt{r^2 - x^2} + D\right)\right)\mathrm{d}x$ 增加两个定积分，把起拱线以上的穹顶壳的体积表示成这3个积分的和．估计这3个积分，从而得到该体积的估计值．随后估计这部分壳的重量.

问题**15**　考虑图7-14所给出的万神殿壳冠的抽象横截面图．将该截面翻转并旋 转，使得横截面外圆的圆心仍然位于O点，内圆中心在(D,a)点，

起拱线在竖线 $x = D$ 上，壳冠的边界为竖线 $x = F$．仔细画出xy平面内新位置处的该壳冠的横截面．横截面处于新的位置时，壳冠的体积等于绕x轴旋转的旋转体的体积．用该事实将壳冠的体积表示为两个定积分的和．注意积分的上下限（不必求出积分的值）．

问题16　已知xyz坐标系的z轴代表穹顶的垂直中心轴．假设用来竖立穹顶的鼓座顶部在xy平面上，鼓座上方穹顶的外侧高度为h．令$A(z)$为壳在z高度处的横截面面积，其中 $0 \le z \le h$．仔细地绘出图形，解释为何穹顶壳的体积可由定积分$\int_0^h A(z)\mathrm{d}z$ 给出．

问题17　参考图4-29和图4-32，讨论怎样应用问题16的结论来估计佛罗伦萨圣母百花大教堂的双壳体积．参考图5-37和第5章的问题8和问题9，描述如何应用问题16来估计圣彼得大教堂的双壳体积．

以下几个问题源自7.3节中的内容．此时，图7-17b的角θ顺时针方向测量时是负的，逆时针测量时是正的．特别地，角 $\theta(-b)$ 是正的， $\theta(b) = -\theta(-b)$是负的．

问题18　应用 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$，证明 $C(b)\sin\theta(b) = -C(-b)\sin\theta(-b)$．考虑图7-17a，令$L(x)=\int_{-b}^{x}\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\mathrm{d}t$为该拱从$(-b,0)$到$(x,f(x))$之间的中心曲线的长度， $L = L(b)$为这条中心曲线的全长．回忆公式

$$C(x)\sin\theta(x)=-w\int_{-b}^{x}\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\mathrm{d}t+\text{常数}$$

取 $x = b$ 和 $x = -b$，使用该公式证明其常数为$\frac{wL}{2}$．从而有$C(x)\sin\theta(x)=w\left(\frac{L}{2}-L(x)\right)$．证明拱内的挤压力满足$C(x)=\sqrt{w^2\left(\left(\frac{L}{2}-L(x)\right)\right)^2+C_0^2}$．

问题19　验证点$(0,h)$和$(b,0)$满足大拱门的中心曲线方程$y=-A\cosh\left(\frac{B}{b}x\right)+(h+A)$．

问题20　回忆一下，大拱门的中心曲线方程$y=-A\cosh\left(\frac{B}{b}x\right)+(h+A)$的图形是压缩一条悬链线得到的，实际上它不是悬链线．这意味着对理想拱的分析不能用到它身上．复习一下该分析的基本假设，大拱门满足它们中的哪一个？不满足哪一个？

问题21　我们的分析表明，理想拱的中心曲线是形式为$y=-A\cosh\left(\frac{B}{b}x\right)$常数的函数图形（$H$为一常数），这个方程满足微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{H}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$．大拱门的中心曲线是形式为$y=-KH\cosh\left(\frac{x}{H}\right)+\text{常数}$的函数图形，这里$H$和$K$是常数．证明这个函数满足微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{H}\sqrt{K^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$．

问题22　因为悬链线（均匀，相当柔软，拉伸也不会变长）只靠张力支撑其自 身重量，这与理想拱的情况类似．调整理想拱的研究，推出悬链线的数学形状．你的结果（如果正确）将验证罗伯特·胡克的结论“像悬挂柔软的线那样，不过要把它倒过来，就会架起一个拱”．

接下来两个问题涉及7.4节，尤其图7-23和拱段的质心C的x坐标$c=\frac{\frac{2}{3}(R^3-r^3)(1-\cos\alpha)}{(R^2-r^2)\alpha}$．因为假设该拱均匀，$C$就是它的形心．因为它位于直线$y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)x$上，$C$的坐标是$\left(c,\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)c\right)$．

问题23　设$\alpha=\frac{\pi}{2}$和$r=\frac{1}{2}R$，证明C的坐标是$\left(\frac{14}{9\pi}R,\frac{14}{9\pi}R\right)$．因为$\frac{14}{9\pi}\approx0.495$，它非常接近于点$\left(\frac{1}{2}R,\frac{1}{2}R\right)$．绘制该拱段并评价这个答案．

问题24　设$\alpha=\frac{\pi}{2}$和$r=\frac{5}{6}R$，证明$C=\left(\frac{182}{99\pi}R,\frac{182}{99\pi}R\right)$，距离$CO<0.828R$．注

意 0.833R＜r，这意味着C位于该拱段之外，这个结论有问题吗？

讨论**7.1**　帕普斯与古尔丁定理　数学家和天文学家保罗·古尔丁（1577—1643）出生在瑞士圣加伦的一个犹太家庭．他后来转信天主教，成为一名耶稣会士．他在罗马的耶稣会学院和维也纳大学教授数学．古尔丁的著作《关于重心》（*De centro gravitatis*）第二卷含有以下声明：

> 如果任何平面图形绕其平面外的轴旋转，所获得的旋转体的体积等于该平面图形的面积乘以它的质心所经过的距离．

回忆一下，对一个均匀区域，形心也是它的质心．古尔丁似乎并不知道他的见解之前已经被最后一个希腊伟大的数学家亚历山大的帕普斯（生活在约公元300年）在他的著作《数学汇编》（*Mathematical Collection*）里明确表述过．古尔丁是否犯下剽窃的罪行成为历史学家争论的话题．

让我们验证一下古尔丁的声明，它现在被称为帕普斯与古尔丁定理．在图7-23中，平面图形是拱段$ABba$，平面外的轴是y轴．该拱段的形心C到y轴距离为$c=\dfrac{\frac{2}{3}(R^3-r^3)(1-\cos\alpha)}{(R^2-r^2)\alpha}$（这里$\alpha$用弧度度量）．所以需要证明$V=A\times 2\pi c$，这里是$A$拱段的面积，$V$为该拱段绕$y$轴旋转一周所得到旋转体的体积．

问题**25**　证明拱段的面积是$A=\frac{1}{2}(R^2-r^2)\alpha$．【提示：求出整圆面积的差，取它的适当比例．】

问题**26**　验证图7-28(a)中的扇形绕y轴旋转一周后得到的旋转体的体积是$\frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\alpha)$．【提示：参考万神殿穹顶壳冠的体积计算（7.2节内）来寻找求解方法，参考拱段力矩的计算（7.4节内）来寻求具体细节．】

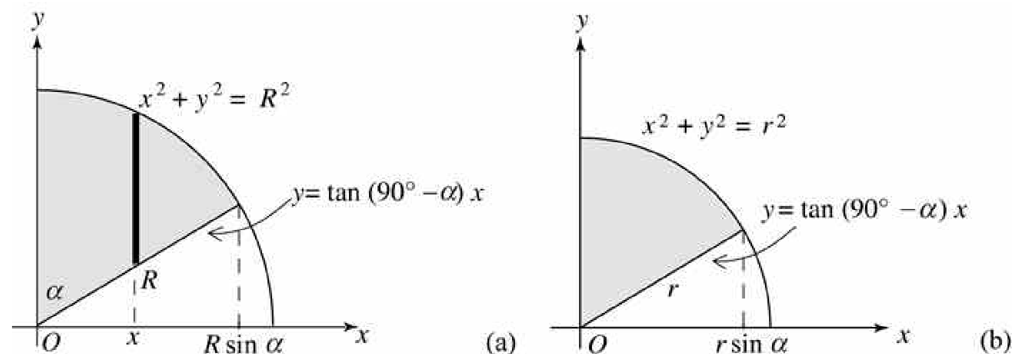


图　**7-28**

问题**27**　考虑问题26的结论并参考图7-28(b)，解释为什么拱段绕*y*轴旋转一周所得的旋转体的体积*V*等于 $V=\frac{2}{3}\pi(R^3-r^3)(1-\cos\alpha)$.

问题**28**　利用已有知识验证帕普斯与古尔丁定理对拱段*ABba*旋转后的旋转体 成立.

讨论**7.2**　薄壳拱顶　旅行通常在机场结束（和开始），所以我们的《建筑中的数学之旅》在接近结尾的时候讨论一座机场航站楼也是再恰当不过的了．埃罗·沙里宁与奥韦·阿鲁普及其他杰出的建筑师和结构工程师一起，为20世纪50年代的薄壳混凝土拱顶设计作出了贡献．因此，不出意料，沙里宁被邀请加入评审委员会，最终把悉尼歌剧院的设计委托给约恩·乌松．他对乌松设计的正面评价深具影响力，著名的澳大利亚地标的存在得益于他的优良评价.

也许沙里宁最值得称赞的结构设计是纽约城内约翰肯尼迪机场的环球航空中心，而不是大拱门．该项目始于1956年，1961年沙里宁去世后，由Saarinen & Associates公司在1962年完成．这个建筑物很快成为纽约市的地标和现代建筑的代表．也许部分因为研究过雕塑并且想要反抗国际风格的盒状外形，沙里宁创造了一种动态高飞的建筑，它表现出旅行的兴奋．这种构造包含4个互相作用的拱形穹顶，由4根Y形柱子支撑．拱顶一起构成一个巨大的伞状壳，它蜿蜒覆盖整个乘客区，高50英尺、长315英尺．这个拱顶雕塑用混凝土建成，内部由看不见的钢筋网做支撑．从远处看，该建筑物的外形就像一只展翅飞翔的鸟．向上倾斜的曲线和拱顶交界面上的一系列天窗为它的内部采光和通风．沙里宁这样看待该航站楼：“一座自身会体现戏剧性、特殊性和旅行的兴奋的建筑物……，一个行动和转变的地方……精心设计的外形用来强调向上翱翔

的线条．我们想要一次提升．”2008年，在成为捷蓝航空的第5航站楼之前，该建筑物全部被整修地焕然一新．

问题**29**　1956~1962年也正是乌松和阿鲁普为悉尼歌剧院的拱顶设计绞尽脑汁的时候．（这在第6章讨论过．）比较图7-29中沙里宁的薄壳混凝土拱顶和彩图24中乌松设计的拱顶．相同之处是什么？你认为为什么乌松的拱顶面临的挑战更大？

讨论**7.3**　研究库仑判据　该讨论探讨在6.3节提出并在7.4节检验过的关于库仑稳定性判据$G_0 \le H \le G_1$的相关知识．

问题**30**　假设 $R = 5$ 和 $r = 4$，单位都是英尺，$w = 150$ 磅每立方英尺．使用库仑提出的“反复试凑”法，找到函数$g_0(\alpha)=\frac{W_\alpha x_0}{y_0}$在$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$上的最大值．【提示：从$\alpha = \frac{\pi}{4}$或 α=45°开始．首先以$\frac{\pi}{20}$即90°（包括正的和负的）为增量改变α的值，获得一般意义上的α值，从而找到最大值．然后利用增量$\frac{\pi}{40}$，即4.5°来细化你的搜寻，再利用增量$\frac{\pi}{180}$或1°．】



图**7-29**　沙里宁为约翰肯尼迪机场设计的航站楼，此处展示了**4**个拱顶中的**3**个以及两根**Y**形柱子．**Pheezy**摄

问题**31**　利用图7-25(b)，将$\frac{W_\alpha x_1}{y_1}$表示为一个函数$g_1(\alpha)$，其中α以弧度为单位，范围在区间$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$之间．然后证明

$$g'_1(\alpha)=\frac{\frac{1}{2}wR(R^2-r^2)[r(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)-R(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha)]+\frac{1}{3}w(R^3-r^3)(R-r)\sin\alpha}{[r-R\cos\alpha]^2}$$

在利用$g'_1(\alpha)$确定函数$g_1(\alpha)$的最小值G_1时，需要处理什么困难？

最后讨论图7-25(a)和图7-25(b)中的水平力H的作用位置问题．我们将看到如果H在图7-25(a)中作用在B、在图7-25(b)中作用在A处，就会遇到困难．

问题32　假设力H在图7-25(a)中作用在B点（与G_0相关），在图7-25(b)中作用在点A（与G_1相关）．证明

$$\frac{W_\alpha x_0}{y_0}=\frac{1}{2}w(R^2-r^2)\left(\frac{\alpha\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)-\frac{1}{3}\frac{w}{r}(R^3-r^3)$$

和

$$\frac{W_\alpha x_1}{y_1}=\frac{1}{2}w(R^2-r^2)\left(\frac{\alpha\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)-\frac{1}{3}\frac{w}{R}(R^3-r^3)$$

问题33　考虑函数$f(\alpha)=\frac{\alpha\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$．利用除法和乘法法则，证明$f'(\alpha)=\frac{\sin\alpha-\alpha}{1-\cos\alpha}$．注意$f(\alpha)$和$f'(\alpha)$在$\alpha=0$时都没有定义．利用正弦和余弦的基本知识，证明函数$f$在区间$0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$上递减．

问题34　继续考虑$f(\alpha)=\frac{\alpha\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$．回顾罗必达法则并应用两次，证明$\lim\limits_{\alpha\to0}f(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\alpha\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=2$．既然$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，从问题33的结论可以得到在$0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$上，$\frac{\pi}{2}\leqslant f(\alpha)<2$．

问题35　结合问题32和问题34提供的知识，得出$\frac{W_\alpha x_0}{y_0}$在$0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$上没有最大值，但取$G_0=w\left[(R^2-r^2)-\frac{1}{3r}(R^3-r^3)\right]$有意义．也能得出$\frac{W_\alpha x_1}{y_1}$在$0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$上的最小值为$G_1=w\left[\frac{\pi}{4}(R^2-r^2)-\frac{1}{3R}(R^3-r^3)\right]$．

问题36　考虑$R=5$，$r=4$（单位都是英尺），$w=150$磅每立方英尺时的情形．验证将其代入问题35的方程后，得到值$G_0=150\left(9-\frac{61}{12}\right)\approx588$

磅，$G_1=150\left(\frac{9\pi}{4}-\frac{61}{15}\right)\approx 450$ 磅．在这种情况下，水平力H如何满足$G_0\le H\le G_1$？

术语表

该术语表包括书中出现的建筑学相关的术语，不包含数学术语．数学术语第一次出现的时候会在文中给出定义，斜体字术语也出现在术语表中．

爱奥尼亚式涡卷（**Ionic volute**）　装饰爱奥尼亚柱式柱子的柱头的涡卷，由螺旋曲线构成．

爱奥尼亚柱式（**Ionic order**）　与古典希腊柱子的外形及其所支撑的结构有关．这种柱子比较优雅，据说其设计是基于女性的体形比例．柱子的柱头装饰着涡卷形图案．其柱身一般有一系列垂直的长凹槽．

安全裕度或安全系数（**safety margin**或**safety factor**）　对诸如桥梁或建筑物等系统超出其实际载荷的结构承载能力的测度．它是系统强度估计与其承载所必须负荷的负载时所需强度的比值．

巴洛克建筑（**Baroque architecture**）　一种使用古典和文艺复兴形式的建筑．它的特征是华丽的装饰、绘画与雕塑的结合、不同外观的交互影响以及绚丽的光线使用．与清晰、理性的文艺复兴形式相比，它有时极其精细、华丽、杂乱．这种情况走向极端，则成为洛可可建筑．

巴西利卡（**basilica**）　一种教堂，设计有被人们称为中殿的一长块很高的中央区域．中殿旁边有一条或两条较矮的侧廊，由拱廊将其与中殿分隔．它的另一个普遍特征是垂直于中殿的耳堂将中殿分成两部分，使教堂的平面呈十字形．较窄的部分称为高坛．它包括祭坛、牧师和乐师使用的唱诗区以及一处称为后殿的凹室．巴西利卡的设计建立在罗马人出于行政目的设立的标准建筑形式基础上．就宗教意义而言，该术语是授予更重要教堂的荣誉，赋给它们许多仪式上的特权．

巴西利卡式（**basilica plan**）　反映出巴西利卡特征的教堂设计．

拜占庭建筑（**Byzantine architecture**）　一种在罗马形式基础上的建筑．一般沿垂直或水平的主轴线组织拱廊、柱廊和穹顶．这种建筑既有狭长巴西利卡式的，也有圆形的、带穹顶的教堂．它必定有拱顶．壁画、马赛克和大理石覆盖了它们的曲面，使人们有一种失重的错觉，达

到强烈的珠光宝气的效果.

板（**slab**）　一般指横跨一段水平距离的扁平的岩石或混凝土部件. 通常板比梁要宽得多，换言之，它一般在另一个水平方向也有充分延伸.

半圆室（**hemicycle**）　一种半圆形结构或这种结构的一部分. 一般在教堂的圆形尽头.

壁柱（**pilaster**）　一种从墙上凸出来的平面矩形柱子或墩柱. 一般不用在结构上，但也有柱头、柱身和柱础. 一般具有古典柱式所规定的特征.

变形（**deformation**）　由于负载的作用使结构部件的形状发生改变.

采光亭（**lantern**）　穹顶顶部允许光线进入下方内部空间的带窗户的小穹顶或塔.

侧廊（**aisle**）　教堂中与中殿平行的分隔区. 一般用拱廊与中殿隔离开.

侧推力（**thrust**）　横向或斜向的力. 通常指拱或穹顶向它的支撑物所施加的力，尤指这种力的向外的水平分量.

层（**course**）　石块或砖块砌成的线.

长凹槽（**flutes**）　柱子上装饰性的垂直凹槽.

唱诗区（**choir**）　高坛的一部分，举行宗教仪式时，供牧师和随从的歌手及乐师使用.

大教堂（**duomo**）　这是一个意大利词，意为大教堂，是（或曾是）主教座堂. 德语和法语对应的词分别是Dom和dôme. 这些词语源于拉丁语domus，意为住所，如domus Dei指神的住所. dome的起源也是这样.

大理石（**marble**）　一种再结晶石灰岩.

地基（**foundation**）　建筑与地面相接的部分，通过它能把负载传给地面.

吨（**ton**）　重量或力的单位，1吨等于2000磅．标准单位公吨是质量单位，1公吨等于1000千克，或约等于2204磅．

墩基（**footing**）　为了使重量更广泛、更安全地分布在地基上面，在墙或柱子底部铺设的一层承重材料．

墩柱（**pier**）　一种实心柱，通常横截面是方形或矩形，一般是柱子的底部．作为一种坚固的砌筑垂直结构，主要用于支撑垂直负载．十字交叉处墩柱通常是指在教堂十字交叉处作为穹顶或塔楼主要支撑的4个主墩柱中的一个．

多里安柱式（**Doric order**）　与古典希腊柱子的外形及其所支撑的结构有关．这种柱子相对比较刚健，据说其设计是基于男性的体形比例．一般来说其特点是柱子有一个简朴的柱头，柱身有一系列长凹槽．

耳堂（**transept**）　指巴西利卡式教堂中与中殿垂直的结构，是中殿的补充，使教堂的布局呈十字形．

帆拱（**pendentive**）　一种结构部件，一般用作以一定角度相交的垂直墙或拱之间的过渡，是竖立穹顶或鼓座的基座的一部分．帆拱一般与从下方支撑它们的垂直墩柱相连，其内表面是曲面三角形．

反作用力（**reaction**）　结构构件响应外力所产生的内力．

方尖碑（**obelisk**）　方尖碑是用单独一块岩石通常是花岗岩所切割成的纪念碑，它一般成对竖立，用于标出并加高埃及神庙的入口．方尖碑横截面是方形，碑身逐渐变细，到顶部成为一座棱锥．它们的高度约为基座直径的9或10倍．一般它的4个侧面上会刻有用埃及象形文字书写的历史记录．

飞扶壁（**flying buttress**）　一种拱形扶壁，通常由砌筑材料建成，它从结构外部拱顶的起拱处延伸到独立的外墩柱上．

扶壁（**buttress**）　一种用于抵消向外的侧推力并提供侧向稳定性的结构部件．一般很坚固并向建筑物倾斜．

浮雕（**relief**）　一种雕塑形式，用这种形式表现的物体不是独立存在的，而是从平面凸出．在深浮雕中，作品从平面背景显著凸出．在浅浮

雕中，它们可能只凸出平面一点.

负载（**load**）　施加到结构部件上的外力，包括该部件的重力.

刚度（**stiffness**）　结构抗变形能力的测度.

杠杆（**lever**）　由固定点（即支点）或轴支撑并能绕其做自由转动的刚性杆. 施加在固定点或轴一端的力会影响另一端的转动力矩.

高侧墙，高侧窗（**clerestory**）　按巴西利卡设计的教堂中殿的墙壁最高处，通常会凿出窗户，称为高侧窗.

高坛（**chancel**）　在巴西利卡式的教堂内，由耳房隔出来的较短的空间. 它包括祭坛、唱诗区和后殿.

哥特式拱（**Gothic arch**）　一种拱，其形状通过连接两条相对的圆弧使它们在高处交于一点得到.

哥特式建筑（**Gothic architecture**）　指一种高耸入云的建筑形式，其特点是哥特式拱、高肋拱顶、与它们所在的墙相比显得很大的瑰丽的彩色玻璃窗、表面弯曲的飞扶壁以及高耸的尖顶和塔楼.

阁楼（**attic**）　建筑物屋顶或穹顶起拱处下面的水平结构. 它沿着下方墙体结构的轮廓而建，可能有窗户，也可能由浮雕装饰.

隔间（**bay**）　建筑物内部或外部的分隔区，通常用其垂直支撑划分.

拱，拱券，拱门，拱形结构（**arch**）　能横跨一段水平距离的垂直结构部件. 通常它是弯曲的，内含被称为拱石的楔形块. 它能承重，也能用于装饰. 罗马拱是半圆形的，哥特拱是尖拱. 伊斯兰建筑使用尖拱、双拱、马蹄形拱和洋葱形拱. 洋葱形拱是尖拱，它们的特征是其弯曲的方式会从凹变成凸.

拱顶（**vault**）　一种横截面是拱形的、连续的天花板或屋顶结构. 通常由砌筑材料或混凝土建成. 它的三种主要类型是筒拱顶、十字拱顶和肋拱顶.

拱顶石（**keystone**）　砌筑拱券顶部的楔形砖，即拱石.

拱廊，有拱廊的街道（**arcade**）　由柱子或墩柱支撑的一系列拱，或一条有屋顶的步道，其道路一侧或两侧由一排这样的拱封闭.

拱肋（**rib**）　一种嵌入拱顶或穹顶内或外部并凸出来的棱，通常砌筑而成，一般是主要结构框架的一部分.

拱石（**voussoir**）　制成楔形且有弯曲边的石头，用作砌筑拱或拱顶的建筑材料. 在拱顶部的拱石称为拱顶石.

拱鹰架（**centering**）　一种临时支架，通常由木头制成，用于在建筑过程中支撑拱、拱形结构或穹顶. 它或者能从地面向上拉开，或者能放得更高，比如靠近起拱处.

古希腊柱廊（**stoa**）　一种古希腊门廊，通常后面是墙，前面带柱廊，设计用来提供有遮蔽的步道.

骨料（**aggregate**）　加到水泥中制成混凝土的硬质材料，如沙子、砾石、小鹅卵石、碎石等.

鼓座，圆鼓石（**drum**）　一种垂直的圆柱形或多边形墙，穹顶或采光亭就竖立在它上面. 它一般由帆拱或突角拱支撑. 另外，它也指经常叠放起来做成柱子的那些圆柱段中的一块.

合力（**resultant**）　作用在同一点上的任意数目的力的合成效果.

桁架（**truss**）　一套相互连接，一般呈三角形的结构部件，常用木头或金属制造，设计时广泛用做梁. 通常它能承重. 简单桁架指含有单独一个刚性结构的三角形.

花岗岩（**granite**）　建筑中使用的最耐用的石头. 它的硬度及切割与塑形的难度（和花费）使它的应用只局限于条件恶劣及大应力情况下的结构. 其每立方英尺的重量在160磅到190磅之间. 它的抗压强度从每平方英尺600~1200 吨不等.

花饰窗格（**tracery**）　花窗内用于分割的石段，能提供强度并分隔玻璃板.

环（**hoop**）　一种水平闭合曲线，通常是圆形，由水平面与拱形或圆柱形结构相交得到.

环向应力（**hoop stress**）　拱形结构中拱的重量沿环的方向所产生的张力．这些张力会沿环的方向拉伸穹的壳，导致它沿子午线方向产生裂缝．

灰泥（**mortar**）　用石灰和（或）水泥、沙子和水制成的混合物，用作砖和石头之间的黏合剂．

混凝土（**concrete**）　用水泥、水和诸如碎石、砌筑材料或沙子等骨料制成的人造石．钢筋混凝土是指嵌入铁丝或铁网以增加强度的混凝土．预应力混凝土指沿长度方向埋入受到极大拉伸的钢缆以便对其进行挤压和加固的混凝土板．罗马混凝土既不是钢筋混凝土也不是预应力混凝土．

挤压力（**compression**）　推结构部件使其受到压缩的力．

尖顶（**pinnacle**）　罩在柱子、扶壁或墩柱顶上的相对较小的垂直结构．尖顶的重量给它下方的结构部件施加向下的压力，增加了该部件的刚度．

剪应力（**shear**）　横向作用在结构部件的轴（比如说梁）上的力．剪应力如果太大，会导致该部件的滑动损坏．

建筑大师（**capomaestro**）　中世纪和文艺复兴时期的石匠头或建筑领袖，通常是项目的主建筑师．

建筑立面，立面图（**elevation**）　建筑物外部或内部的垂直面，也指按比例对它们进行绘制的图．

教堂后殿（**apse**）　教堂中殿后部，或更精确来说，教堂高坛后部的拱状凹室．通常它在平面图中呈半圆形或多边形．

教堂中殿（**nave**）　教堂中高而长的中心区域，通常留给信徒使用．它的两侧一般是较低矮的侧廊，用柱廊进行分隔．

结构（**structure**）　结构部件系统．在建筑物内，一般指具有主要承载功能的完整系统．

结构部件（**structural element**）　有望承受其自身重量和其他负载的建

筑结构的基本单元．如拱、穹顶、壳和拱顶以及作为组成部分的梁、柱子、墩柱和板．

结构构件（**structural component**）　建筑上的一个完整单元，可能像砖这么小，也可能如墙的预应力混凝土这么大．它根据制作或建造过程而非结构功能进行区分．

结构形式（**structural form**）　结构部件或更大结构的几何外形．

截面图，截面（**section**）　指建筑中按比例绘制的一种示意图，它用来表示被平面，一般是垂直平面所切割的建筑物的各个组件．在数学中，它指一个图形被其他图形所截后得到的图形．如圆锥截面和圆或球截面的概念．

静力学（**statics**）　研究处于平衡状态的建筑或其他结构的学科，尤其研究这类结构上的负载、它们产生的侧推力、它们如何响应以及为何会遭到破坏．

科林斯柱式（**Corinthian order**）　与古典希腊柱子的外形及其所支撑的结构有关．柱子相对而言比较优雅，据说其设计是基于纤细女性的体形比例．其特点是柱子的柱头用叶形图案精心装饰．

壳（**shell**）　穹顶或拱顶中弯曲的砌筑或混凝土部分．换言之，是穹顶或拱顶中坚固的起结构作用的部分．

跨度（**span**）　拱、梁、拱顶或穹顶的垂直支撑之间的水平距离．

栏杆（**balustrade**）　用流线形或锥形的支柱制成的围栏．

缆索结构（**funicular structure**）　挂有重物的绳子或缆绳所组成的结构，或更一般地来说，是其内部所有作用力都是张力或挤压力的结构．

肋拱顶（**ribbed vault**）　一种连续的天花板或屋顶结构，通常砌筑而成，横截面为拱形，起重要的结构作用的拱肋网络嵌入并从其内部凸出．肋拱顶的网格是指填充拱肋间区域的砌筑材料或石头．

力（**force**）　一种施加在结构部件上或由结构部件所施加的推或拉的动作．从外部施加到部件上的力是外力．最常见的外力是重力．结构部件响应外力所产生的力为内力或反作用力．

力矩（**moment of force**或**bending moment**）　指力在结构部件内产生转动或弯曲的能力．其数量等于力的大小和它到转轴的距离的乘积．

凉廊（**loggia**）　建筑物的一部分，它的一侧或多侧都是敞开的，敞开处带有柱廊或拱廊．一般是一层的门廊或大型露天带拱廊或柱廊的休息室．

梁（**beam**）　一种结构部件，一般处于水平或倾斜位置，其横截面统一是方形或矩形．一般由垂直的柱子或墩柱支撑．

梁（**lintel**）　处于水平位置由柱子在其末端进行支撑的单独一块石头的通用名字．*post*和*lintel*分别是*column*和*beam*的另外名字．

列柱廊（**peristyle**）　一种圆形安放柱子的方式，一般是为了支撑上面的结构．

露天剧场（**amphitheater**）　竞技场或露天大型运动场，其中心有一座用于竞技或表演的椭圆形舞台，四周平行分布着一排排不断增高的椭圆形座位．古典希腊或罗马剧场在平面图上呈半圆形，其座位从一个半圆形舞台开始层叠摆放，越靠上围成的半圆形越大．露天剧场（希腊语中前缀amphi意为“在两边”）实际上是两个这样的半圆形结构的组合．

罗马式建筑（**Romanesque architecture**）　一种建筑形式，多体现于巴西利卡式教堂，特点是沉重的砌筑建筑，有厚重的墙和小窗户，使用半圆形罗马拱和拱廊以及筒拱和十字拱顶．

门廊（**portico**）　一种廊式结构，一般在建筑物的入口处，有一个由古典样式的柱子所支撑的屋顶．还指一种由拱廊或柱廊支撑的带屋顶的走道．

米哈拉布（**mihrab**）　清真寺墙内指向麦加方向的祈祷壁龛．

平衡（**equilibrium**）　一种平衡状态．在这种情况下，结构上有作用力，但作用力的合力为零，因此不会发生移动．如果一个平衡条件受到临时干扰后，能够自己恢复到平衡状态，则该条件是稳定的，否则不稳定．

平面图（**plan**）　按比例绘制的代表建筑物基本水平剖面的图．

起拱处（**springing**）　拱、拱顶或穹顶从其垂直支撑点开始向里弯曲的位置.

砌筑材料（**masonry**）　诸如砖、石或晒干的泥砖这样的建筑材料. 通常用灰泥把各块砌筑材料粘合在一起.

穹顶（**dome**）　一种弯曲的屋顶或天花板结构，它横跨并封闭它下方的空间. 通常穹顶关于中心垂直轴对称并有圆形或多边形底部. 穹顶一般是球形.

砂岩（**sandstone**）　在受到压力的情况下，由粘合材料如粘土和硅石把沙粒（通常是矿物石英或长石）粘合在一起所形成的岩石. 由于沙子非常耐用，岩石的质量极大程度依赖于这些粘合材料的性质. 砂岩用于制造最好的琢石加工品. 每立方英尺的砂岩重量在120~145磅之间. 它的抗压强度从每平方英尺200~900 吨.

山花，三角楣饰（**pediment**）　一种包含三角形区域的古典建筑部件，一般安放在门廊或建筑正面的顶部. 它通常坐落在柱子所支撑的水平结构上. 它还指门、窗户或壁龛上方的三角形或圆形装饰物.

湿壁画（**fresco**）　在涂料还湿时用水性颜料在墙上作的画.

十字拱顶（**groin vault**）　连续的天花板或屋顶结构，通常砌筑而成，由筒拱与一个或多个小筒拱正交得到.

十字交叉处（**crossing**）　教堂中殿与耳房交叉处的空间. 它的上面一般有一座穹顶或塔楼.

十字交叉处的墩柱（**crossing piers**）　教堂十字交叉处的大型支柱，通常有4个，作为十字交叉处上方穹顶或塔楼的主要支撑.

石灰岩（**limestone**）　任何以碳酸钙为主要成分的岩石. 它有很多不同的种类. 它们可以制成很好的建筑材料，但需要选择晶粒均匀细腻且没有裂缝和裂口的石头. 它容易加工处理，形成优质的颜色均匀的表面. 其重量从每立方英尺120~170磅不等. 抗压强度从每平方英尺90~500 吨. 这种岩石不如花岗岩或砂岩耐用，吸水性较强.

水泥（**cement**）　通过加热泥土和石灰石的混合物所得到的粉末. 当它

与骨料和水混合时会变硬，形成混凝土．罗马人发现的火山灰有水泥的性质．

碎石（**rubble**）　砌筑建筑中使用的坚硬的砖石碎块．有时墩柱用碎石建内部，用琢石砌表面．

索多边形（**funicular polygon**）　缆索结构的受力图．

筒拱顶（**barrel vault**）　一种圆柱形的连续天花板或屋顶结构，通常砌筑而成，有拱形横截面，一般是半圆形或尖拱．

透视，透视法（**perspective**）　物体进入眼睛的方式．也指在平面上绘制所看到的物体、形状和空间关系的一套技巧．

突角拱（**squinch**）　拱或拱的配件，通常砌筑而成，固定在垂直墙壁的拐角处，斜向上以支撑上层结构，比如穹顶．

卫城（**acropolis**）　古代希腊城市的城堡，也指设有防御体系的高地．一般提到的卫城就是指雅典城的卫城．

文艺复兴建筑（**Renaissance architecture**）　指一种建筑形式，其朴素、理性、比例均衡的各个组成部分内使用古典希腊和罗马元素如拱、柱子、柱廊和门廊．

稳定性（**stability**）　结构在受力的情况下保持稳定平衡状态的能力．

希腊十字架（**Greek cross**）　四臂等长的十字架，一般用在早期基督教堂和后期拜占庭教堂的设计中．

系梁（**tie-beam**）　结构中主要的水平单元，它处于拉伸状态以阻止该结构向外伸展．尤指木屋顶内实现这一功能的梁．

镶板（**coffer**）　天花板或拱顶上凹进去的平板，形状为方形、六角形或其他多边形．花格镶嵌指将这些镶板按规律排列．

向量（**vector**）　一种用箭头表示力的形式，箭头的方向代表力的方向，箭头的长度与力的大小成正比．

小穹顶（**cupola**）　通常指规模较小的穹顶．

宣礼塔（**minaret**）　附属或邻近清真寺的高耸细长的塔，用于宣礼.

悬链线（**catenary**）　均匀加载且极其柔软的一根悬吊的缆绳、链条或绳子所形成的形状. 只在基部有外部支撑且仅靠对挤压力的反作用力来对抗重力的拱，其中心曲线的形状就是悬链线.

檐壁（**frieze**）　柱子所支撑的建筑物水平板上方的部分. 一般用浅浮雕装饰.

伊斯兰建筑（**Islamic architecture**）　一种以拱、尖角拱、拱形结构、穹顶和塔楼为特征的建筑. 这些结构部件源自古典形式，但在清真寺进行公共祷告需要有大型空间，从而使它发展出新的形式和独特的建筑技术. 这些建筑有地区差异，但它们的共同主题是都大量使用装饰，如雕刻、镶嵌、绘画和镀金的石头、木材、灰泥、瓷砖、红陶或瓦. 几何、植物及书法图案成为主流.

应力（**stress**）　结构材料上力的局部强度的测度. 通常将该强度表示为力的大小除以它在上面的作用面积.

圆形建筑，圆形大厅（**rotunda**）　具有圆形平面和穹顶的建筑物. 也指大的圆形或圆柱形房间.

圆形设计（**central plan**）　一种教堂设计，其特点是有一个中心穹顶以及从中心向四周辐射对称的结构. 一般是希腊十字架的形状.

张力（**tension**或**tensile force**）　沿径向结构单元方向趋于拉伸它的力.

支点（**fulcrum**）　能绕其做自由转动的支撑物.

质量（**mass**）　身体或物体内的物质数量. 物体的质量等于比值W/g，其中W指该物体的重量，g是万有引力常数（时间单位取秒，长度单位取英尺时，$g\approx32$英尺/平方秒）.

主教堂（**cathedral**）　有主教座的重要教堂. 该单词源自希腊语cathedra，意为座位或长凳.

柱廊（**colonnade**）　排成一行的一系列柱子.

柱梁结构（**column and beam**） 由两根柱子支撑一根水平梁的基本结构.

柱梁结构（**post and lintel**） 基础结构（column and beam）的另一个名称.

柱身（**shaft**） 柱子的主要垂直部件．更精确地说，它是柱子在柱础和柱头之间的部分.

柱式（**order**） 按比例精心布置的柱子及其支撑部件的古典样式中的一种．突出的例子有科林斯、多里安和爱奥尼亚柱式.

柱厅（**hypostyle**） 有一座平屋顶坐落在矩形分布的柱子上.

柱头（**capital**） 柱子的一部分，就在柱身的上面．一般装饰华丽.

柱子（**column**） 一种常用来承重的垂直结构部件，其水平横截面通常为圆形，尺寸比高度小很多．传统上，它包含顶端的柱头，作为主要部分的柱身以及底部的柱础．它通常用石头制作，一般越往上越细．多里安柱式中的柱头很朴素．爱奥尼亚柱式中，柱头用涡卷装饰．科林斯柱式中，柱头用叶子形的图案装饰.

桩（**pile**） 被成排夯进土中的大梁，以便给建筑物的地基或其他结构提供稳固的支撑.

琢石，琢石镶面（**ashlar**） 正侧面均被切成矩形的一块砌筑材料．还指全部石头都是方形，从而使其垂直和水平接缝皆呈统一模式的砌筑体.

子午线（**meridian**） 过垂直中心轴的平面所确定的穹顶表面上的曲线.

自由体受力图或受力图（**free body diagram**或**force diagram**） 用向量表示结构部件上（一般是部件上的一个点）的作用力的示意图．每个向量均指向它所表示的力的方向，向量长度与力的大小成正比.

参考文献

以下这些参考文献是本书的重要信息源．对想要深入探索该领域的读者，它们不无裨益．第一部分历史文献中的条目与两章以上内容有关，后面的则与每章的具体内容有关．

文明、建筑和数学历史

C. Boyer and U. Merzbach, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1991.

David Burton, *The History of Mathematics: An Introduction*, 7th ed., McGraw-Hill, New York, 2010.

Kenneth Clark, *Civilization: A Personal View*, Harper & Row, New York, 1969.

Norman Crowe, *Nature and the Idea of a Man-Made World*, MIT Press, Cambridge, 1997.

Will and Ariel Durant, *The Story of Civilization*, 11 vols. Simon and Schuster, New York, 1935–1975 (especially vol. 2, *The Life of Greece*; vol. 3, *Caesar and Christ*; vol. 4, *The Age of Faith*; and vol. 5, *The Renaissance*).

P. Goldberger,*Why Architecture Matters*, Yale University Press, New Haven, 2009.

T. Heath, *A History of Greek Mathematics*.Vol. 1, *From Thales to Euclid*; vol. 2, *From Aristarchus to Diophantus*, Dover Publications, New York, 1981.

David Jacobs, *Architecture*, Newsweek Books, New York, 1974.

Victor Katz, *A History of Mathematics*, 3rd ed., Addison Wesley, Boston, 2008.

Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

David Macauley, *Building Big*, Houghton Miffl in, Boston, 2000. Companion to the PBS Series.

Rowland Mainstone, *Developments in Structural Form*, 2nd ed., Architectural Press, Oxford, 2001.

Robert Mark, *Light, Wind, and Structure: The Mystery of the Master Builders*, MIT Press, Cambridge, 1990.

Robert Mark and David P. Billington, Structural Imperative and the Origin of New Form, *Technology and Culture*, vol. 30, no. 2 (1989), 300–329. Special Issue: Essays in Honor of Carl W. Condit.

Marian Moffett, Michael Fazio, and Lawrence Wodehouse, *Buildings across Time: An Introduction to World Arc-hitecture*, McGraw-Hill, Boston, 2004.

James Neal, *Architecture: A Visual History*, PRC Publishing, London, 1999.

H. Schlimme, editor, *Practice and Science in Early Modern Italian Building: Towards an Epistemic History of Arc-hitecture*, Electa, Milan, 2006.

Dirk Struik, *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications, New York, 1948.

Time-Life Books, *The Great Ages of Man: A History of the World's Cultures*, 20 vols. Time, Inc., New York, 1966 (especially *Ancient Egypt*, *Classical Greece*, *Imperial Rome*, *Byzantium*, *Age of Faith*, *Renaissance*, *Age of Enlightenment*, and *Twentieth Century*).

B. L. Van der Waerden, *Science Awakening*, Oxford University Press, New York, 1961.

第 **1** 章　人类的觉醒：感知形状与创造建筑

Norman Crowe, *Nature and the Idea of a Man-Made World*, MIT Press, Cambridge, 1997.

Downs Dunham, Building an Egyptian Pyramid, *Archaeology*, vol. 9, no. 3 (1956), 159–165.

第 **2** 章　希腊几何学与罗马工程

Marcus Frings, The Golden Section in Architectural Theory, *Nexus Network Journal*, *Architecture and Mathematics*, vol. 4, no. 1 (2002), 1–18.

Mark Wilson Jones, *Principles of Roman Architecture*, Yale University Press, New Haven, 2000.

Rowland Mainstone and Robert Mack, On the Structure of the Roman Pantheon, *Art Bulletin*, vol. 68, no. 4 (1986), 673–674.

Robert Mark and Paul Hutchinson, On the Structure of the Roman Pantheon, *Art Bulletin*, vol. 68, no. 1 (1986), 24–34.

Michael J. Ostwald, Under Siege: The Golden Mean in Architecture, *Nexus Network Journal, Architecture and Mathematics*, vol. 2, nos. 1–2 (2000), 75–82.

W. K. West, Problems in the Cultural History of the Ellipse, *Technology and Culture*, vol. 19, no. 4 (1978), 709–712.

第 **3** 章　受信仰启示的建筑

James S. Ackerman, “Ars Sine Scientia Nihil Est”: Gothic Theory of Architecture at the Cathedral of Milan, *Art-Bulletin*, vol 31. no 2 (1949), 84–111.

G. Binding, *Medieval Building Techniques*, Tempus Publishing, Stroud, Gloucestershire, Great Britain, 2004.

J. M. Bloom, On the Transmission of Designs in Early Islamic Architecture, *Muqarnas*, vol. 10 (1993), 21–28. Essays in Honor of Oleg Grabar.

Martin S. Briggs, Gothic Architecture and Persian Origins, *Burlington Magazine for the Connoisseurs*, vol. 62, no.361 (1933), 183–189.

Ahmet S. Cakmak, Rabun M. Taylor, and Eser Durukal, The Structural Confi guration of the First Dome of Justinian's Hagia Sophia (A.D. 537–558): An Investigation Based on Structural and Literary Analysis, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 29, no. 4 (2009), 693–698.

K.A.C. Creswell, The Origin of the Persian Double Dome, *Burlington Magazine for Connoisseurs*, vol. 24, no. 128 (1913), 94–99, and vol. 24, no. 129 (1913), 152–156.

William Emerson and Robert L. van Nice, Hagia Sophia, Istanbul: Preliminary Report of a Recent Examination of the Structure, *American Journal of Archeology*, vol. 47, no. 4 (1943), 403–436.

Helen C. Evans, Byzantium Revisited: The Mosaics of Hagia Sophia in the Twentieth Century, *The 4th Annual Pallas Lecture*, Modern Greek Program, University of Michigan, February 9, 2006.

Deborah Howard, *The Architectural History of Venice,* Yale University Press, New Haven, 2002.

Deborah Howard, Venice and Islam in the Middle Ages: Some Observations of Architectural Infl uence, *Architectural History*, vol. 34 (1991), 59–74.

William MacDonald, Design and Technology in Hagia Sophia, *Perspecta*, vol. 4 (1957), 20–27.

H. McCague, A Mathematical Look at a Medieval Cathedral, *Math Horizons*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

Arthur U. Pope, Gothic Architecture and Persian Origins, *Burlington Magazine for the Connoisseurs,* vol. 62, no. 363 (1933), 293–294.

Christine Smith, East or West in 11th- Century Pisan Culture: The Dome of the Cathedral and Its Western Counterparts, *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 43, no. 3 (1984), 195–208.In Memoriam: Kenneth J. Conant.

Emerson H. Swift, The Latins at Hagia Sophia, *American Journal of*

Archeology, vol. 39, no. 4 (1935), 458–474.

Rabun Taylor, A Literary and Structural Analysis of the First Dome on Justinian's Hagia Sophia, Constantinople, *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 55, no. 1 (1996), 66–78.

Hermann Wey1, *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, 1952.

第 **4** 章　数学的传播及在建筑中的转化

Martin S. Briggs, Architectural Models-I, *Burlington Magazine for Connoisseurs*, vol. 54, no. 313 (1929), 174–175, 178–181, 183.

Giovanni Fanelli and Michele Fanelli, *Brunelleschi's Cupola: Past and Present of an Architectural Masterpiece*, Mandragora, Florence, 2004.

F. Prager and G. Scaglia, *Brunelleschi: Studies of His Technology and Inventions*, MIT Press, Cambridge, 1970.

Howard Saalman, *Filippo Brunelleschi: The Cupola of Santa Maria del Fiore*, A. Zwemmer, London, 1980.

Howard Saalman, Giovanni di Gherardo da Prato's Designs Concerning the Cupola of Santa Maria del Fiore in Florence, *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 18, no. 1 (1959), 11–20.

Hans Samelson, Letter in the *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol.57, no. 3 (1998), 360–361.

Franklin K. B. Toker, Florence Cathedral: The Design Stage, *Art Bulletin*, vol. 60, no. 2 (1978), 214–231.

第 **5** 章　文艺复兴：建筑与人文精神

James Ackerman, *The Architecture of Michelangelo*, University of Chicago Press, Chicago; Penguin Books, New York, 1986.

James Ackerman, *Palladio*, Penguin Books, New York, 1966.

Richard J. Betts, Structural Innovation and Structural Design in Renaissance Architecture, *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 52, no. 1 (1993), 5–25.

Suzanne Boorsch, The Building of the Vatican: The Papacy and Architecture, *Metropolitan Museum of Art Bulletin*, new series, vol. 40, no. 3 (1982–83), 1–64.

Fritjof Capra, *The Science of Leonardo*, Doubleday, New York, 2007.

Deborah Howard, Venice between East and West: Marc'Antonio Barbaro and Palladio's Church of the Redentore, *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 62, no. 3 (2003), 306–325.

James Lees-Milne, *Saint Peter's: The Story of Saint Peter's Basilica in Rome*, Little, Brown and Company, Boston, 1967.

R. Mainstone, The Dome of St.Peter's: Structural Aspects of Its Design and Construction, and Inquiries into Its Stability, *Architectural Association Files*, vol.39 (1999), 21–39.

Charles B. McClendon, The History of the Site of St. Peter's Basilica, Rome, *Perspecta*, vol. 25 (1989), 32–65.

H. A. Millon and V. M. Lampugnani, editors, *The Renaissance from Brunelleschi to Michelangelo: The Representation of Architecture*, Rizzoli, New York, 1994.

Henry A. Millon and Craig Hugh Smyth, *Michelangelo Architect: The Facade of San Lorenzo and the Drum and Dome of St. Peter's*, Companion to an exhibition at the National Gallery of Art, 9 October–11 December 1988, organized by the National Gallery of Art, Washington, in association with the Casa Buonarroti, Florence, and Olivetti. Olivetti, Milan, 1988.

Branco Mitrovic and Ivana Djordjevic, Palladio's Theory of Proportions and the Second Book of the "Quattro Libri dell'Architettura," *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 49, no 3 (1990), 279–292.

Earl Rosenthal, The Antecedents of Bramante's Tempietto, *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 23, no. 2 (1964), 55–74.

Howard Saalman, Michelangelo: S. Maria del Fiore and St. Peter's, *Art Bulletin*, vol. 57, no. 3 (1975), 374–409.

Giorgio Vasari, *The Lives of the Most Excellent Painters, Sculptors and Architects*, Florence, 1550.

Stephen R. Wassel, Andrea Palladio (1508–1580), *Nexus Network Journal, Architecture and Mathematics,* vol. 10, no. 2 (2008), 213–225.

Rudolf Wittkower, *Architectural Principles in the Age of Humanism*, W. W. Norton & Company, New York, 1971.

第 **6** 章　新建筑：材料、结构分析、计算机及设计

O. Arup and R. S. Jenkins, The Evolution and Design of the Concourse at the Sydney Opera, *Proceedings: Institution of Civil Engineers,* vol. 39 (1968), 541–565.

Turpin C. Bannister, The Genealogy of the Dome of the United States Capitol, *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 7, no. 1/2 (1948), pp. 1–19, 31, with two appendixes by August Schoenborn, pp. 20–30.

Antonio Becchi, Massimo Corradi, Federico Foce, and Orietta Pedemonte, editors, *Essays on the History of Mechanics: In Memory of Clifford Ambrose Truesdell and Edoardo Benvenuto*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

J. A. Bennett, *The Mathematical Science of Christopher Wren*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

C. Blasi, E. Cosson, and I. Iori, The Fractures of the French Panthéon: Survey and Structural Analysis, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, iss. 3–4 (2008), 379–388.

P.Block, M. DeJong, J. Ochsendorf, As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches, *Nexus Network Journal, Architecture and Mathematics*, vol. 8, no. 2 (2006), 9-19.

Glenn Brown and William B. Bushong, The Work of Thomas U. Walter, Architect, pp. 317–389, in *History of the United States Capitol*, House Document No. 108-240 (1901–1903), United States Capitol Preservation Commission, 1998.

James W. P. Campbell and Robert Bowles, The Construction of the New Cathedral, pp. 207–219 in Derek Keene, Arthur Burns, and Andrew Saint, editors, *St. Paul's The Cathedral Church in London*, Yale University Press, New Haven, 2004.

J.-A. de Coulomb, Essai sur une application des règles de maximis & minimis à quelques problème de statique, relatifs à l'architecture, *Mémoires de Mathématiques & Physique*, vol. 7, 1773, pp. 343–382, Paris 1776.

Kerry Downes, Wren and the New Cathedral, pp. 191–206 in Derek Keene, Arthur Burns, and Andrew Saint, editors, *St. Paul's The Cathedral Church in London*, Yale University Press, New Haven, 2004.

S. B. Hamilton, The Place of Sir Christopher Wren in the History of Structural Engineering, *Transactions—Newcomen Society for the Study of the History of Structural Engineering*, vol. 14 (1933–34), 27–42.

J. Heyman, *Coulomb's Memoir on Statics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

J. Heyman, *The Masonry Arch*, Ellis Horwood, Chichester, England; Halsted Press, John Wiley & Sons, New York, 1982.

J. Heyman, *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Derek Keene, Arthur Burns, and Andrew Saint, editors, *St. Paul's The Cathedral Church in London*, Yale University Press, New Haven, 2004.

Nicoletta Marconi, Technicians and Master Builders for the Dome of St. Peter's in Vatican in the Eighteenth Century: The Contribution of Nicola Zabaglia (1664–1750), *Proceedings of the Third International Congress on*

Construction History, Cottbus, Germany, May 2009, 991–999.

J. L. Meriam and L. G. Kraige, *Engineering Mechanics Statics*, 5th ed., John Wiley & Sons, New York, 2002.

Y. Mikami, *Utzon's Sphere: Sydney's Opera House—How It Was Designed and Built*, Shokokusha Publishing Co., Tokyo, 2001.

William J. Mitchell, Roll Over Euclid: How Frank Gehry Designs and Builds, pp. 352–353 J. Fiona Ragheb, editor, in *Frank Gehry, Architect*, Guggenheim Museum Publications, New York, 2001.

William J. Mitchell, A Tale of Two Cities: Architecture and the Digital Revolution, *Science*, vol. 285 (1999), 839–841.

Ricard de Montferrand, *Eglise cathedrale de Saint Isaac*, Paris 1845.

John Nutt, *Constructing a Legacy: Technological Innovation and Achievements*, pp. 103–121 in Anne Watson, editor, *Building a Masterpiece: The Sydney Opera House*, Powerhouse Publishing, Sydney; Lund Humphreys Publishing, London, 2006.

H. W. Robinson, Robert Hook as Surveyor and Architect, *Notes and Records of the Royal Society of London*, vol. 6, no. 1 (1948), 48–55.

J. Rondelet, Memoire historique sur le doe du Panthéon Francaise, Paris, *Traite theorique et practique de l'art et batir*, vol. 4, part 2, Paris, 1797.

J. Summerson, J. H. Mansart, Sir Christopher Wren and the Dome of St. Paul's Cathedral, *Burlington Magazine*, vol. 132, no. 1042 (1990), 32–36.

Sydney Opera House, *Nomination by the Government of Australia for Inscription on the World Heritage List 2006*, Australian Government Department of the Environment and Heritage, 2006.

David Taff, *Computers and the Opera House: Pioneering a New Technology*, pp. 84–101 in Anne Watson, editor, *Building a Masterpiece: The Sydney Opera House*, Powerhouse Publishing, Sydney; Lund Humphreys Publishing, London, 2006.

S. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, Dover Publications, New York, 1983.

Jφrn Utzon, *The Sydney Opera House: Utzon's Design Principles*, Sydney Opera House Trust, Sydney, 2002.

Pierre Varignon, *Nouvelle Méchanique*, C. Jombert, Paris, 1725.

Anne Watson, editor, *Building a Masterpiece: The Sydney Opera House*, Powerhouse Publishing, Sydney; Lund Humphreys Publishing, London, 2006.

S. Wren, *Parentalia: or Memoirs of the family of the Wrens*, London 1750, rpt. Gregg Press, 1965.

W. Zalewski and E. Allen, *Shaping Structures: Statics*, John Wiley & Sons, New York, 1998.

第 **7** 章　基础微积分及其在结构分析中的应用

Mario Como and Antonio Grimaldi, Large Structures Behaviour: The Past and the Future, pp. 47–79 in Michel Frédmont and Franco Maceri, editors, *Novel Approaches in Civil Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

Alexander J. Hahn, *Basic Calculus: From Archimedes to Newton to Its Role in Science*, Springer-Verlag, New York, 1998.

Robert Osserman, How the Gateway Arch Got Its Shape, *Nexus Network Journal, Architecture and Mathematics*, 12(2010).

Robert Osserman, Mathematics of the Gateway Arch, *Notices of the AMS,* Providence, RI, 2010, 220–229.

James Stewart, *Single Variable Calculus: Concepts and Contexts*, Brooks/Cole, Pacifi c Grove, CA, 2005.

图片来源

已在图注中注明来源的除外，本书中其他视觉材料的来源如下（数字指图片编号）.

answers.com (2.2)

backtoclassics.com (彩图 21)

bible-history.com (2.35)

Reprinted with the permission of Cambridge University Press. Copyright © 1995 Cambridge University Press (6.2)

commons.wikimedia.org (1.1, 1.9, 1.13, 3.2, 3.19, 3.29, 3.45, 5.1, 5.4, 5.40, 5.51, 5.71, 6.1c, 6.6, 7.20, 7.29, 彩图 2, 彩图 3, 彩图 4,彩图 12, 彩图 16, 彩图17a-d, 彩图 20)

commons.wikimedia.org, © Creative Commons Attribution (1.3, 1.5, 1.6, 3.11, 3.12, 3.30, 3.31, 3.36, 5.16, 6.1d, 彩图 8)

commons.wikimedia.org, © GNU Free Documentation License and Creative Commons Attribution (2.1, 2.3, 2.33, 2.36, 2.37, 2.61, 2.62, 2.64, 3.23, 3.37, 3.44, 4.34, 5.2, 5.3, 5.5, 5.14, 5.15, 5.18, 5.20, 5.23, 5.32, 6.1a, 6.1b, 6.49, 彩图 10, 彩图 13, 彩图 24)

counterlightsrantsandblather1.blogspot.com/2009/11/renaissance-saint-peters-michelangelo.html (5.33)

c2r4a1.blogspot.com/2007/03granada-spain-21-22-feb-2006-alhambra.html (Plate 17e)

en.wikipedia.org (3.22, 5.31, 5.44, 5.72, 彩图 18)

flickr.com/photos (2.65, 3.9, 3.21)

Fotolia (5.30)

fotothing.com, © Creative Commons Attribution (6.54)

gaudiclub.com/ingles/i_vida/colonia.asp (6.53)

intranet.arc.miami.edu/rjohn/images/Brunelleschi/S.%20Maria%20del%20Fic
(4.27)

jstor.org/stable (3.6, 5.34, 5.36, 5.39, 6.8)

mcah.columbia.edu/dbcourses/public portfolio.cgi?view=1526# (5.35)

Used with permission of the Princeton University Library (2.38, 2.45, 3.27, 3.28, 5.17, 5.19, 5.21, 5.69, 5.70, 6.35, 6.39, 6.40, 6.43, 6.44, 6.45, 6.47, 7.13, 彩图 15)

Used with permission of the Princeton University Library, © IGDA: Pubbli-aerfoto (info@pubbliaerfoto.it) (2.38)

Used with permission of the Princeton University Library, image courtesy of John Blazejewski/Princeton University Library (3.34, 3.46, 5.64, 5.73, 6.4, 6.5, 6.12, 6.13, 6.14, 6.48, 彩图 7)

Réunion des Musées Nationaux/Art Resource, NY, © RMN (Institut de France)/Art Resource (5.26)

shutterstock.com (2.25, 3.7, 3.10, 4.33, 彩图 6)

www.thecultureconcept.com (2.12)

t771unit3.pbworks.com/w/page/6766569/Chapter%209-%20The%20Early%20Middle%20Ages (彩图 9)

© The Warburg Institute, University of London (2.42)

wikimediafoundation.org, © GNU Free Documentation License and Creative Commons Attribution (3.24, 彩图 14)